

ε Zwei

A u f s ä t z e

mathematischen Inhalts,

nehmlich:

- 1) Versuch einer Theorie über die Vertheilung des Druckes bei einem horizontal auf drei Unterlagen ruhenden Balken.
- 2) Eine eigne Darstellung der Grundlehren der Variationsrechnung.

V e r f a s s t

v o m

Grafen G. von Buquoy.

N e b s t 2 K u p f e r t a f e l n.

Leipzig, 1812.

bei Breitkopf und Härtel.

u f s ä t z e

mathematischen Inhalts,

nehmlich:

-) Versuch einer Theorie über die Vertheilung des Druckes bei einem horizontal auf drei Unterlagen ruhenden Balken.
-) Eine eigne Darstellung der Grundlehren der Variationsrechnung.

V e r f a s s t

v o m

Grafen G. von Buquoy.

N e b s t 2 K u p f e r t a f e l n.

Leipzig, 1812.

bei Breitkopf und Härtel.

AN DER UNIVERSITÄT

zu Bonn

am 1. März 1878

an die Herren Professoren

der philosophischen Fakultät

zu Bonn

die Unterzeichnete

geb. a.

Dr. phil. h. c. h.

Dr. phil. h. c. h.

Dr. phil. h. c. h.

Dr. phil. h. c. h.

Druckvertheilung

des

horizontalen Balkens.

ε Zwei

A u f s ä t z e

mathematischen Inhalts,

nehmlich:

- 1) Versuch einer Theorie über die Vertheilung des Druckes bei einem horizontal auf drei Unterlagen ruhenden Balken.
- 2) Eine eigne Darstellung der Grundlehren der Variationsrechnung.

V e r f a s s t

v o m

Grafen G. von Buquoy.

N e b s t 2 K u p f e r t a f e l n.

Leipzig, 1812.

b e i B r e i t k o p f u n d H ä r t e l.

ART. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

mathematisches Institut

1) Vorlesung über die Theorie der
Höhen der Punkte in einem
mit drei Punkten verbundenen System

2) Eine neue Darstellung der
Gravitation

Ge. a.

Gravitation und die

Gravitation und die

Gravitation und die

Gravitation und die

Druckvertheilung

des

horizontalen Balkens.

Versuch einer Theorie
über
die Vertheilung des Druckes
bei einem horizontal auf drei Unterlagen
ruhenden Balken.

Der durchaus gleichdicke Balken A B (Fig. I.) hänge darum horizontal, weil er durch die in m, s, n, angebrachten über Rollen geschlagenen Gewichte X, P, P, im Gleichgewichte erhalten wird *).

Nothwendig ist hier allemal $P + P + X = G$, wenn G des Balkens Gewicht ist; es können aber der einzelnen Werthe von P, X, P gar mancherlei seyn. Soll der Bal-

*) Es ist angenommen, dass seine Krümmung so unbedeutend sei, dass die Unterstützungspunkte m, s, n vom Schwerpunkte o nur unbedeutend gegen jenen Fall verrückt sind, wo der Balken vollkommen gerade und horizontal wäre. Die merkliche Beugung in der Figur ist nur der sinnlichen Darstellung wegen angezeigt.

ken bloß durch $\mathfrak{P}$ und X horizontal erhalten werden, so muß seyn $\mathfrak{P} + X = \mathfrak{G}$, ferner

(wenn $AO = OB = \frac{\xi}{2}$, $An = u$, $Am = v$)

$$\frac{u \cdot \mathfrak{P} + v + X}{\mathfrak{P} + X} = \frac{\xi}{2}, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$X = \left(\frac{\xi}{2} - u \right) \frac{\mathfrak{G}}{v - u} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P} = \left(v - \frac{\xi}{2} \right) \frac{\mathfrak{G}}{v - u}.$$

Drücken wir den Punkt s durch das Gewicht P in die Höhe, und es soll der Balken horizontal im Gleichgewichte bleiben, so müssen wir von X und $\mathfrak{P}$ die Theile x und y wegnehmen, welche wir nun bestimmen wollen.

Nimmt man bei unserm Balken von der ein für allemal angenommenen Länge ξ , und von dem ein für allemal angenommenen Gewichte $\mathfrak{G}$ die Dimensionen u , v , also auch $\mathfrak{P}$ und X als gegeben an, betrachtet ferner auch P als gegeben, und lasse bloß den Aufhängepunkt s als willkürlich gelten, so ist folgendes wahr: Es gibt für ein gegebenes x (also auch gegebenes y , da $P = x + y$ ist,) nur einen Werth von sm , da

$$\frac{u(P - y) + (v - sm)P + v(X - x)}{\mathfrak{P} + P + X} = \frac{\xi}{2}$$

seyn muss; also lässt sich x durch eine Funktion des ersten Grades von s m ausdrücken, also $x = a + b \cdot s m$. Nun ist aber für $s m = 0$ das $x = P$, und für $s m = n m$ das $x = 0$, woraus folgt $x = P - \frac{P}{n m} \cdot s m$, und

$$y = \frac{P}{n m} \cdot s n, \text{ oder wenn wir } a s = \sigma$$

nennen:

$$x = P \left(\frac{(\sigma - u)}{v - u} \right), \text{ und } y = P \left(\frac{v - \sigma}{v - u} \right).$$

Man sieht also, dass der Balken an Gewichte $= \mathfrak{G}$, und an Länge $= l$ durch die in n, s, m bestehenden senkrechten Hinauf-

$$\text{drucke } \mathfrak{P} - y = \frac{\mathfrak{G} \left(v - \frac{g}{2} \right) - P (v - \sigma)}{v - u}$$

P , und

$$X - x = \frac{\mathfrak{G} \left(\frac{g}{2} - u \right) P (\sigma - u)}{v - u}$$

horizontal im Gleichgewicht erhalten werde. Legt man daher den Balken horizontal auf drei fixe Unterlagen, so dass er in den Punkten n, s, m auf diesen Unterlagen aufliegt, so wird er horizontal im Gleichgewicht erhalten, wenn diese Unterlagen in n, s, m auf den Balken die Drucke

$$\frac{\mathfrak{G}(v - \frac{g}{2}) - P(v - \sigma)}{v - u}, P, \text{ und}$$

$$\frac{\mathfrak{G}(\frac{g}{2} - u) - P(\sigma - u)}{v - u} \text{ ausüben,}$$

worin ausser P alles gegeben ist. Man sieht aber leicht ein, dass die Drucke, welche der Balken auf jede Unterlage ausübt, vollkommen bestimmt seyn müssen, und dass hier *keine willkührliche* Vertheilung des Druckes $\mathfrak{G}$ auf n, s, m Statt finden könne. Diese Vertheilung des Gewichts $\mathfrak{G}$ auf die Unterlagen n, s, m aus der Natur der Sache zu bestimmen, ist der Endzweck unsers gegenwärtigen Aufsatzes.

Der horizontale Stillstand des Balkens wird erhalten: 1) durch die Drucke der Unterlagen n, s, m , 2) durch jene zwischen den Elementen des Balkens wirksamen Kräfte, welche ich (da sie den Aggregatzustand des Körpers bestimmen) Aggregatkräfte benennen will, wodurch alle Elemente des Balkens, welche für sich allein senkrecht herabfallen möchten, in der Luft schwebend erhalten werden.

Der Umstand sub 1) erreicht seinen Endzweck auf unendlich vielerlei Arten der Druckvertheilung auf n, s, m (wie oben ge-

zeigt wurde) enthält also *an und für sich* keinen Grund für das Gesetz dieser Vertheilung. Es muss demnach der Umstand sub 2) den Grund für das Gesetz der Druckvertheilung auf n, s, m enthalten. Wir wollen es versuchen, das Gesetz dieser Druckvertheilung aus folgendem Grundsatz herzuleiten: *Da die Aggregatkräfte es sind, welche die Vertheilung des Druckes $\mathfrak{G}$ auf n, s, m bestimmen, so werden sie diese Vertheilung so bestimmen, dass hiedurch die Summe S der wirksamen Aggregatkräfte ein Minimum werde, wenn nicht Nebenumstände obwalten, welche sich dieser Vertheilung entgegensetzen; denn dann ist die Summe aller hier wirksamen Kräfte $\mathfrak{G} + S$, deren Endzweck ist, den Balken im horizontalen Stillstande zu erhalten, ein Minimum, und folglich wird zur Erreichung ihres Endzweckes gerade nur so viel Kraft verwendet, als hiezu erforderlich ist.*

Unsere Aufgabe reduziert sich also vor der Hand nur auf die Beantwortung folgender drei Fragen: *A.* Welches ist der algebraische Ausdruck der Summe S bei jeder Vertheilung des Druckes $\mathfrak{G}$ auf n, s, m , oder, bei jedem Werthe von P ? *B.* Be

welcher Vertheilung dieses Druckes $\mathcal{G}$ auf n , s , m oder bei welchen Werthen von P wird dieser algebraische Ausdruck von S ein Minimum? C. Walten nicht Umstände ob, welche sich dieser Vertheilung, oder diesem Werthe von P entgegensetzen, und liesse sich nicht etwa gerade aus diesen Umständen die Vertheilung der Drucke, oder der Werth von P bestimmen?

A. Beantwortung der ersten Frage.

Es liege unser Balken, welchen wir (um die Aufgabe zu vereinfachen) als unendlich dünne, aber von durchaus *gleicher* endlicher Höhe $OH=H$, und durchaus *gleicher* unendlich kleiner Dicke $=S$ annehmen, auf den Unterlagen n , s , m , und habe irgend eine in der Figur dargestellte Krümmung, welche dadurch entsteht, dass einige Fasern des (an und für sich geraden) Balkens auseinander gezogen, andere zusammengepresst werden.

Ich verstehe unter *vollkommen elastischen Körpern in Bezug der Ausdehnung sowohl als des Zusammenpressens*, solche, bei denen zwischen den Ausdehnungslängen α und den Ausdehnkräften A , ferner zwischen den Zusammenpressungslängen β und den Zusam-

menpressungskräften B bestimmte Gesetze Statt finden, so dass man allgemein

$$\alpha = F(\mathcal{A}) \quad \text{und}$$

$$\beta = f(B) \quad \text{setzen kann.}$$

Um den hier abgehandelten Gegenstand der mathematischen Analyse unterwerfen zu können, müssen wir den Balken als einen *vollkommen elastischen Körper in Bezug auf Ausdehnung sowohl, als auf Zusammenpressung betrachten*, d. h. wir nehmen folgendes an:

Ein Stück dieses Balkens von der Länge $= l$, und vom Querschnitte $= q$, dehne sich durch die ausdehnende Kraft $\mathcal{A}$ um die Länge α aus, und es sei $\alpha = F(\mathcal{A})$; dasselbe Stück werde durch die Zusammenpressungskraft B um die Länge β kürzer, und es sei $\beta = f(B)$. Wir nennen $MN = \mathfrak{E}$, und betrachten den dem $\mathfrak{E} = MN$ entsprechenden durch zwei unendlich nahe Querschnitte begrenzten Elementartheil $cdhg$ des Stückes sm .

Die Krümmung des Balkens kann auf keine andere Weise geschehen, als dadurch, dass in jedem Balkenelemente die obern Fasern bis auf eine derselben op herab zusammengedrückt, und die untern Fasern bis

auf eine derselben op hinauf ausgedehnt werden, oder umgekehrt; so zwar, dass von op aus nach g die Verkürzung, und von op aus nach h die Verlängerung zunehme, oder umgekehrt. Ob nun die Endpunkte der verkürzten und verlängerten Fasern eben in *geraden* Linien cd , gh , liegen, ist freilich eine Frage; allein wollten wir diess nicht annehmen, so müssten wir komplizirte Verschiebungen der unter einander liegenden Fasern zugeben, welche dem einfachen Wege, den die Natur in allen ihren Operationen stets befolgt, gar nicht entsprechen möchten.

Indess bleibt die Behauptung, dass cd , gh gerade Linien seien, doch immer nur eine *Hypothese*. Wie sollen aber dergleichen Aufgaben auch ganz ohne Hypothesen aufgelöst werden, da selbst ein *Euler* z. B. bei Entwicklung der elastischen Kurven den Hypothesen nicht ausweichen konnte. Sind nicht die von Euler so glücklich aufgestellten Fundamentalformeln der ungleichförmigen Bewegung Hypothesen? Lässt sich denn ausserhalb dem Gebiete der reinen Mathematik etwas behaupten, das nicht auf Hypothesen gegründet wäre? und sollte man sich darum die Mühe ersparen, über alles

Jene zu raisonniren, das nicht eben die reine Mathematik beträfe?

Betrachten wir die einander berührenden Elementartheilchen $cgdh$ und $gikh$, so ist folgendes leicht einzusehen:

Die Faser w' ist auf gh senkrecht, daher zieht die ausgedehnte Faser w' jene w gar nicht nach g hinauf; diess gilt von jeder Faser, d. h. die Fasern werden insgesamt weder gegen noch von einander gezogen, daher die Repulsions- und Adhäsionskräfte zwischen den fast horizontalen Fasern gar nicht in Wirksamkeit sind.

Wir haben demnach hier blos jene Kräfte zu betrachten, die sich den Extensionen und Kontraktionen der Fasern unmittelbar widersetzen.

Betrachten wir op als die unausgedehnte Faser des Elements $cdhg$, so ist der Ruhepunkt, worum die Fasern gespannt und zusammengedrückt sind, in irgend einem Punkte von op , und da op unendlich klein ist, im Punkte o anzunehmen erlaubt. Ziehen wir durch p die rt parallel mit cd , so ist zwischen rp und pg die steigende Kontraktion, und zwischen pt und ph die stei-

gende Extension der Fasern des Elements $cghd$ sinnlich dargestellt.

Man begreift leicht, dass eine Faser unsers Balkens an ursprünglicher Länge $= op$ und vom Querschnitte $= \delta \cdot dz$ durch eine Kraft dk um die Länge $z \cdot \varphi = \frac{q \cdot op}{1} \cdot \frac{F(dk)}{\delta \cdot dz}$ ausgedehnt werde; wir setzen, es folge hieraus

$dk = \overset{+}{F}(z, dz, \varphi, \delta, l, q, op)$, und eben so aus

$z' \varphi = \frac{q \cdot op \cdot f(dk')}{1 \delta \cdot dz'}$, die Gleichung dk'

$= \overset{+}{f}(z', dz', \varphi, \delta, l, q, op)$, so folgt, dass die Summe der statischen Momente um o durch die Spannungen und Kontraktionen

$= \int z' dk' + \int z dk = \int z' \overset{+}{f}(z', dz', \varphi, \delta, l, q, op) + \int z \overset{+}{F}(z, dz, \varphi, \delta, l, q, op)$ sei. Wir messen z und z' von p an hinab und hinauf.

Es würde an den Spannungen in $cgdh$ nichts geändert, wenn wir uns den Theil Aa eingemauert, und den Theil aB durch ein Gewicht $=$

$$= \frac{\mathfrak{G} \left(\frac{\zeta}{2} - u \right) - P(\sigma - u)}{v - u} = X - x$$

in die Höhe gezogen dächten. Dann hätten

aber besagte Spannungen dem statischen Momente $(X - x) (v - \sigma - \mathfrak{E}) - \frac{(\xi - \sigma - \mathfrak{E})^2 \mathfrak{G}}{2 \xi}$ das Gleichgewicht zu halten.

Wir haben also hier folgende Gleichung:

$$\text{I. } \left(\frac{\mathfrak{G} \left(\frac{\xi}{2} - u \right) - P(\sigma - u)}{v - u} \right) (v - \sigma - \mathfrak{E}) - \frac{(\xi - \sigma - \mathfrak{E})^2 \cdot \mathfrak{G}}{2 \xi} = \int z' dk' + \int z dk$$

woraus freilich nichts gefolgert werden kann, bis nicht die Gleichung $\alpha = F(\mathfrak{A})$ und $\beta = f(B)$ bestimmt sind.

Betrachten wir den Balken als eine elastische Feder, und nehmen (wie Euler in seiner Theorie der elastischen Kurven) an, es sei $\alpha = m\mathfrak{A}$, worinn m eine Konstante; setzen ferner auf ähnliche Art $\beta = n.B$ (worinn n eine Konstante), so ist $z.\varphi = \frac{q \cdot op}{1} \cdot \frac{m \cdot dk}{\delta \cdot dz}$ (woselbst op , δ , dz , φ , Unendlichkleine der ersten, dk ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung). Hieraus folgt

$$dk = \frac{1}{q \cdot m} \cdot \frac{\delta}{op} \cdot \varphi \cdot z dz. \text{ Eben so ist}$$

$$dk' = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \frac{\delta}{op} \cdot q \cdot z' dz'. \text{ Es ist demnach}$$

$$\int z' dk' + \int z dk = \int \frac{1}{q \cdot n} \cdot \frac{\delta}{op} \cdot \varphi \cdot z'^2 dz' + \int \frac{1}{q \cdot m} \cdot \frac{\delta}{op} \cdot \varphi \cdot z^2 dz.$$

Da sich diese zwei Ausdrücke bloß auf ein bestimmtes Element $cgdh$ beziehen, so sind hier φ und op beständige Grössen; daher

$$\int z' dk' + \int z dk = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \frac{\delta}{op} \cdot \varphi \cdot \frac{z'^3}{3} + \frac{1}{q \cdot m} \cdot \frac{\delta}{op} \cdot \varphi \cdot \frac{z^3}{3}.$$

Wir haben die Gleichung

$$\left(\frac{\mathfrak{G} \left(\frac{z}{2} - u \right) - P(\sigma - u)}{v - u} \right) (v - \sigma - \mathfrak{E})$$

$$- \left(\frac{z - \sigma - \mathfrak{E}}{2z} \right)^2 \mathfrak{G} =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot q \cdot n} \cdot \frac{\delta}{op} \cdot \varphi \cdot (H - od)^3 +$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot q \cdot m} \cdot \frac{\delta}{op} \cdot \varphi \cdot od^3, \text{ oder abgekürzt:}$$

$$II. M = \frac{N}{n} \cdot \varphi (H - od)^3 + \frac{N \cdot \varphi}{m} \cdot od^3.$$

Wären die Aggregatkräfte des Balkens unendlich gross, so würde der Balken um gar

nichts, wären sie hingegen sehr klein, so würde er *merklich* von der geraden Linie abweichen. Der Endzweck der Aggregatkräfte des gegebenenmaassen unterstützten Balkens, wobei P irgend einen angenommenen Werth habe, ist demnach, *den Balken so gerade wie möglich zu erhalten*, welcher Endzweck erreicht wird, wenn in jedem Elemente *cgdh* die *Rotation um jenen Punkt o vor sich geht*, wodurch φ ein *minimum* wird. Es wird also in jedem Elemente *cdhg* das *od* jenen Werth haben, bei welchem φ am kleinsten wird. Die Gleichung II gibt aber

$$\varphi = \frac{\frac{1}{N} M}{\frac{1}{n} (H - o d)^3 + \frac{1}{m} o d^3},$$

daher hat *od* jenen Werth, wobei

$$\frac{1}{n} (H - o d)^3 + \frac{1}{m} o d^3 \text{ ein maximum wird.}$$

Da $m > n$, *od* nie kleiner als Null und nie grösser als *H* werden kann, so ist besagter Ausdruck am grössten, also φ am kleinsten, wenn $od = 0$ ist. Wir sehen also, dass die Compression der Fasern um den Punkt *d* vor sich gehen müsse, und dass gar keine Spannung der Fasern bestehen

könne, d. h. dass der Beugung des Balkens im Elemente $chgd$ bloß durch das Sträuben der horizontalen Fasern gegen das *Zusammenpressen* widerstanden wird. Es ist auch sehr natürlich, die grössern Kräfte vorzugsweise vor den kleinern anzuwenden, wenn die Beugung möglichst geringe seyn soll. *)

Es ist im Elemente $chgd$ der Winkel

$$\varphi = \frac{Mn}{NH^3} =$$

$$= \frac{n}{H^3} \left(\left(\frac{\mathfrak{G}(\frac{\varrho}{2} - u) - P(\sigma - u)}{v - u} \right) (v - \sigma - \mathfrak{E}) - \frac{(\zeta - \sigma - \mathfrak{E})^2 \mathfrak{G}}{2 \zeta} \right)$$

$$\times \frac{5 \cdot q \cdot op}{1 \cdot \delta}, \text{ folglich ist die Summe aller von } d$$

bis c wirksamen Repulsionskräfte III. $k' = \frac{3}{2H}$

$$\times \left(\frac{\mathfrak{G}(\frac{\varrho}{2} - u) - P(\sigma - u)}{v - u} \right) (v - \sigma - \mathfrak{E}) - \frac{(\zeta - \sigma - \mathfrak{E})^2 \mathfrak{G}}{2 \zeta}$$

Auf dieselbe Art folgt für jedes Element $a'b'$ des Theils ns , wenn $M'N' = \mathfrak{E}'$ genannt

*) Ich behaupte hier nicht den Unsinn, dass alle Fasern von der obersten bis zur *untersten* zusammengepresst werden, sondern nur, dass sich die Fasern einen so viel möglich tiefen Punkt zum *Ruhepunkte* der Compressionen und Extensionen aussuchen werden, dass man also approximative $od = 0$ setzen darf.

wird, da $\int z dk + \int z' dk' = P (\sigma - u - \mathfrak{E}') + (N - x) (v - u - \mathfrak{E}') - \frac{(\xi - u - \mathfrak{E}')^2 \cdot \mathfrak{G}}{2\xi}$, die Gleichung

$$\varphi = \frac{n}{H^3} \cdot \frac{3 \cdot q \cdot op}{1 \cdot \delta}$$

$$\times \left(P(\sigma - u - \mathfrak{E}') + \left(\frac{\mathfrak{G}(\frac{\xi}{2} - u) - P(\sigma - u)}{v - u} \right) (v - u - \mathfrak{E}') - \frac{(\xi - u - \mathfrak{E}')^2 \cdot \mathfrak{G}}{2\xi} \right)$$

folglich für die Summe aller in Wirksamkeit gesetzten Aggregatkräfte (durch Compression der horizontalen Fasern).

$$\text{IV. } k' = \frac{5}{2H}$$

$$\left(P(\sigma - u - \mathfrak{E}') + \left(\frac{\mathfrak{G}(\frac{\xi}{2} - u) - P(\sigma - u)}{v - u} \right) (v - u - \mathfrak{E}') - \frac{(\xi - u - \mathfrak{E}')^2 \cdot \mathfrak{G}}{2\xi} \right)$$

Die Summe der in Wirksamkeit gesetzten Compressionskräfte im Elemente über der mittlern Auflage s erhält man

$$= \frac{3}{2H} \left(\frac{\mathfrak{G}(\frac{\xi}{2} - u) - P(\sigma - u)}{v - u} \right) (v - \sigma) - (\xi - \sigma)^2 \frac{\mathfrak{G}}{2\xi}, -$$

wenn man in der Gleichung III das $\mathfrak{E} = 0$, oder wenn man in jener IV das $\mathfrak{E}' = ns =$

$= \sigma - u$ substituirt, welches zugleich eine richtige Rechnung beweist.

Betrachten wir irgend ein Element $a'' b''$ des Theiles mB , und nennen $M'' N'' = \mathfrak{E}''$, so ist $\int z dk + \int z' dk' = - \frac{(L - v - \mathfrak{E}'')^2 \mathfrak{G}}{2 \zeta}$,

woraus abermals folgt

$$\varphi = - \frac{n}{H^3} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot op}{1 \cdot \delta} \frac{(L - v - \mathfrak{E}'')^2 \mathfrak{G}}{2 \zeta},$$

und die Summe der in $a'' b''$ wirksamen Compressionskräfte

$$V. k' = - \frac{3}{2 H} \frac{(\zeta - v - \mathfrak{E}'')^2 \mathfrak{G}}{2 \zeta} \text{ worin das}$$

Zeichen $-$ nichts anders bedeutet, als dass die Elemente, die man vorhin unten breit und oben schmal annahm, nunmehr unten schmal und oben breit angenommen werden müssen. Man erhält die Summe der wirksamen Compressionskräfte im Elemente

$$\text{über der Unterlage } m = - \frac{5}{2 H} \frac{(\zeta - v)^2 \mathfrak{G}}{2 \zeta},$$

man mag in die Gleichung V. das $\mathfrak{E}'' = 0$, oder in jene III. das $\mathfrak{E} = sm = v - \sigma$ substituiren.

Betrachten wir endlich ein Element $a''' b'''$ im Theile nA , und nennen $M' N''' = \mathfrak{E}'''$,

so ist $\varphi = -\frac{n}{H^3} \cdot \frac{3 \cdot q \cdot o p}{1 \cdot \delta} \cdot \frac{\mathcal{G}}{2 \zeta} (u - \mathfrak{X}''')^2,$

und

VI. $k' = -\frac{3}{2H} \cdot \frac{\mathcal{G}}{2\zeta} (u - \mathfrak{X}''')^2.$ Die Summe der im Elemente über der Unterlage n wirksamen Compressionskräfte erhält man $= -\frac{3\mathcal{G}u^2}{4H\zeta},$ man mag in der Gleichung

VI. das $\mathfrak{X}''' = 0,$ oder in der Gleichung IV. das $\mathfrak{X}' = 0$ substituiren. Die Gleichungen V. und VI. geben für $\mathfrak{X}'' = \zeta - v$ und $\mathfrak{X}''' = u$ die Werthe $k' = 0$ und $k' = 0,$ welches auch so seyn muss.

Heisse $\frac{(\frac{\zeta}{2} - u)}{v - u} = a, \frac{\sigma - u}{v - u} = b, v - \sigma = c, \zeta - \sigma = d, \frac{1}{2\zeta} = f, \frac{3}{2H} = h, \sigma - u = s, v - u = v, \zeta - u = \lambda,$ so wird aus No. III, $k' = h \left((ac - fd^2) \mathcal{G} - bcP + (2df - a) \mathcal{G} + bP \right) \mathfrak{X} - f \mathcal{G} \mathfrak{X}^2,$ oder wenn wir $\mathcal{G} = \mathcal{G}io,$ und $P = Pio$ bezeichnen (da $\mathcal{G}$ und P unendlich kleine der ersten Ordnung sind) $k' = h.io \left((ac - fd^2) \mathcal{G} - bcP + (2df - a) \times \mathcal{G} + bP \right) \mathfrak{X} - f \cdot \mathcal{G} \cdot \mathfrak{X}^2 = h.f(\mathfrak{X})io.$

Man bemerke, dass k' die Summe der wirksamen Aggregatkräfte an dem *Endpunkte* der Fa-

sern in der Linie gh ausdrücke, dass also
 (da gh und cd einander unendlich nahe
 sind) in jeder auf cg und dh gezogenen
 Senkrechten die Summe der wirksamen Ag-
 gregatkräfte $= k'$ sey. In den Linien cd
 ist die Summe der wirksamen Aggregat-
 kräfte $= k' = h \cdot f(\mathfrak{E}) \cdot i.o.$ Nennen wir io
 die Entfernung jeglicher zwei Elemente von
 einander (Elemente nenne ich hier *Ele-*
mentarpunkte, die in den Abständen i.o von
 einander abstehen), und verlängern $\mathfrak{E}$ um
 $i.o, 2i.o, 3i.o, u. s. w.,$ so wächst die
 Summe aller von M bis N wirksamen Ag-
 gregatkräfte um $hf(\mathfrak{E})i.o, 2hf(\mathfrak{E})i.o,$
 $3hf(\mathfrak{E})i.o, u. s. w. = hf(\mathfrak{E})i.o, hf(\mathfrak{E})$
 $\times 2.i.o, hf(\mathfrak{E})3.i.o,$ (so wie die Summe der
 wirksamen Aggregatkräfte mit der *Länge* eines
 senkrecht gedrückten Cylinders wächst, wenn
 er gleich unabänderlich mit einem Pfunde
 von oben herabgedrückt und von unten
 hinauf eben so stark unterstützt wird); es
 ist also die Summe $\mathfrak{S}$ der von M bis N
 wirksamen Aggregatkräfte jene Funktion von
 $\mathfrak{E}$, welche um $h \cdot f(\mathfrak{E})i.o$ wächst, wenn $\mathfrak{E}$
 um 1 o zunimmt, d. h. es ist $\mathfrak{S} =$
 $\int h \cdot f(\mathfrak{E}) d \mathfrak{E}.$

Es ist also $\mathcal{S} = h (a c - f d^2) \mathcal{G} \mathcal{E} - h b c$
 $\times P \mathcal{E} + \left((2 d f - a) \mathcal{G} + b P \right) \frac{h \mathcal{E}^2}{2} - \frac{h f \mathcal{G} \mathcal{E}^3}{3} + C$

worinn, (da für $\mathcal{E} = 0$,
 $\mathcal{S} = h ((a \mathcal{G} - b P) c - d^2 f \mathcal{G})$ i. o. ist)
 $C = 0$ ist; also ist die Summe der wirksamen Aggregatkräfte von s bis m

$$\text{VII. } \mathcal{S} = h \left((a c - f d^2) \mathcal{G} (v - \sigma) - b c P (v - \sigma) + \right. \\ \left. ((2 d f - a) \mathcal{G} + b P) \frac{(v - \sigma)^2}{2} - \frac{f \mathcal{G}}{3} (v - \sigma)^3 \right)$$

Auf ähnliche Art finden wir die Summe $\mathcal{S}'$ der wirksamen Aggregatkräfte von n bis s (Fig. 2).

$$\text{VIII. } \mathcal{S}' = h \left((s P + \mathcal{G} a v - P b v - \lambda^2 f \mathcal{G}) (\sigma - u) \right. \\ \left. + \left(\frac{P b}{2} - \frac{P}{2} - \frac{\mathcal{G} a}{2} + \lambda \mathcal{G} f \right) (\sigma - u)^2 - \frac{\mathcal{G} f}{3} (\sigma - u)^3 \right)$$

Nennen wir nun noch $\mathcal{S}''$ und $\mathcal{S}'''$ die Summe der wirksamen Aggregatkräfte in den Stücken mB und nA , worin P nicht vorkommen kann, so beantworten wir die erste Hauptfrage mit der Gleichung $\mathcal{S} = \mathcal{S} + \mathcal{S}' + \mathcal{S}'' + \mathcal{S}'''$

B. Beantwortung der zweiten Frage.

S wird in Bezug auf den Werth von P ein minimum, wenn $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}'$ ein minimum wird.

Nennen wir $(ac - fd^2) \mathfrak{G} (v - \sigma) h = A$,
 $hbc(v - \sigma) = B$, $h(2df - a) \mathfrak{G} \frac{(v - \sigma)^2}{2} = C$,

$hb \frac{(v - \sigma)^2}{2} = D$, $\frac{hf \mathfrak{G}}{3} (v - \sigma)^3 = E$,

ferner $h(\sigma - u) s = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}av(\sigma - u)h = \mathfrak{B}$,
 $h(\sigma - u)bv = L$, $(\sigma - u)h\lambda^2 f \mathfrak{G} = \mathfrak{D}$,

$h(\sigma - u)^2 \frac{b}{2} = \mathfrak{E}$, $h(\sigma - u)^2 \frac{1}{2} = f$,

$h(\sigma - u)^2 \frac{\mathfrak{G}a}{2} = \mathfrak{H}$, $h(\sigma - u)^2 \lambda \mathfrak{G}f = \mathfrak{J}$,

$h(\sigma - u)^3 \frac{\mathfrak{G}f}{5} = \mathfrak{K}$, so ist

$$\text{IX. } \mathfrak{S} + \mathfrak{S}' = A + C - E + \mathfrak{B} - \mathfrak{D} - \mathfrak{H} + \mathfrak{J} - \mathfrak{K} \\ + (D - B + \mathfrak{A} - \mathfrak{E} + \mathfrak{E} - f)P.$$

Da nun der Koeffizient von P eine *negative* Grösse ist, so wird $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}'$ um so kleiner, je grösser P ist. Gesetzt also, es hänge unser Balken in den Punkten m, s, n durch Gewichte $\mathfrak{X} - x$, P, $\mathfrak{P} - y$, in Fäden, so wäre die Summe der wirksamen Aggregat-

kräfte um so kleiner, je grösser P gemacht würde, also am allerkleinsten (da P nicht grösser als $\frac{\mathfrak{G}(\frac{q}{2} - u)}{\sigma - u}$ werden kann) wenn

$P = \frac{\mathfrak{G}(\frac{q}{2} - u)}{\sigma - u}$ gemacht würde, wo dann

$\mathfrak{R} - x = 0$ seyn müsste.

C. Beantwortung der dritten Frage.

Hat aber P den eben besagten Werth, so hängt m tiefer als s , da doch die Köpfe der Unterlagen in einerlei Horizontalen liegen. Es kann demnach P jenen Werth nicht haben, bei welchen die Summe aller wirksamen Kräfte ein minimum würde. Wir wollen nun die Werthe von P suchen, bei welchen $\mathfrak{R} - x$ in m und $\mathfrak{P} - y$ in n gerade so gross werden, als erforderlich ist, damit m und n in einerlei Horizontallinie s zu liegen kommen.

$$\text{Heisse } \frac{3n \cdot q \cdot op}{H^3 \cdot l \cdot \delta} = A, \frac{\mathfrak{G}(\frac{q}{2} - u) - P(\sigma - u)}{v - u} = B,$$

$$v - \sigma = C, \frac{\mathfrak{G}(\frac{1}{2} - \sigma)^2}{2\frac{1}{2}} = D, \frac{\mathfrak{G}(\frac{1}{2} - \sigma)}{\frac{1}{2}} = E, \frac{\mathfrak{G}}{2\frac{1}{2}} = F,$$

$$P(\sigma - u) = I, v - u = K, \frac{\mathfrak{G}(\frac{1}{2} - u)^2}{2\frac{1}{2}} = M, \frac{\mathfrak{G}(\frac{1}{2} - u)}{\frac{1}{2}} = N,$$

so ist

im Stücke sm das $\varphi = (ABC - AD) + (AE - AB) \mathfrak{E} - AF \mathfrak{E}^2$.

im Stücke sn das $\varphi = (AI + ABK - AM) + (AN - AP - AB) \mathfrak{E}' - AF \cdot \mathfrak{E}'^2$

worin wir im Stücke sm die Länge $sa = \lambda$, im Stücke sn die Länge $na' = \lambda$ nennen, und $d\lambda$ als beständiges Inkrementum annehmen; ferner $\mathfrak{E}$ mit λ im Stücke sm, und $\mathfrak{E}'$ mit λ im Stücke sn approximative als gleichgross betrachten (wegen der äusserst unmerklich angenommenen Beugung des Balkens).

Betrachten wir im Theile sm das Element cdhg, so ist $sd = \lambda$, MN oder approximative $M\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$, $dh = d\lambda$, $\mathfrak{G}F = d\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}d = \mathfrak{V}$, $GR = d\mathfrak{V}$; da nun cd, gh wegen der sehr geringen Beugung des Balkens auf MD fast senkrecht stehen, so ist approximative $GFR = \varphi$, also

$d\mathfrak{V} = \varphi d\mathfrak{E}$, oder:

$d\mathfrak{V} = (ABC - AD) d\mathfrak{E} + (AE - AB) \mathfrak{E} d\mathfrak{E} - AF \mathfrak{E}^2 d\mathfrak{E}$, also

$\mathfrak{V} = (ABC - AD) \mathfrak{E} + \frac{(AE - AB)}{2} \mathfrak{E}^2 -$

$\frac{AF \mathfrak{E}^3}{3}$, wobei zu bemerken ist, dass jeder

Koeffizient von $\mathfrak{E}$ ein unendlich kleines der ersten Ordnung ist, daher MD in dem sB' liegend muss gedacht werden; für $\mathfrak{E} = sm = v - \sigma$ ist $\mathfrak{Y} = (ABC - AD) (v - \sigma) + \frac{(AE - AB)}{2} (v - \sigma)^2 - \frac{AF}{3} (v - \sigma)^3$, welches $= 0$ seyn muss, wenn m und s in einerlei Horizontalen sB' liegen sollen.

Eben so ist im Stücke sn, $d\mathfrak{Y}' = \varphi d\mathfrak{E}' = (AI + ABK - AM) d\mathfrak{E}' + (AN - AP - AB) \mathfrak{E}' d\mathfrak{E}' - AF \cdot \mathfrak{E}'^2 d\mathfrak{E}'$, also $\mathfrak{Y}' = (AI + ABK - AM) \mathfrak{E}' + \frac{(AN - AP - AB)}{2} \mathfrak{E}'^2 -$

$\frac{AF \cdot \mathfrak{E}'^3}{3}$, also für $\mathfrak{E}' = ns = \sigma - u$, ist $\mathfrak{Y}' = (AI + ABK - AM) (\sigma - u) + \frac{(AN - AP - AB)}{2} (\sigma - u)^2 - \frac{AF}{3} (\sigma - u)^3$,

welches auch $= 0$ seyn muss, wenn n und s in einerlei Horizontalen sA' liegen sollen.

Setzen wir $B = \frac{\mathfrak{G}(\frac{\mathfrak{Q}}{2} - u)}{v - u} - \frac{(\sigma - u)P}{v - u} =$

$\mathfrak{U} - \mathfrak{B}P$, $I = (\sigma - u)P = \mathfrak{J} \cdot P$, so folgt aus $(AC(\mathfrak{U} - \mathfrak{B}P) - AD)(v - \sigma) + \left(\frac{AE - A(\mathfrak{U} - \mathfrak{B} \cdot P)}{2} \right) (v - \sigma)^2 - \frac{AF}{3} (v - \sigma)^3 = 0$,

$$P = D - \mathfrak{A}C - \frac{E}{2} (v - \sigma) + \frac{\mathfrak{A}}{2} (v - \sigma) + \frac{F}{3} (v - \sigma)^2$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{2} (v - \sigma) - C\mathfrak{B}.$$

Eben so folgt aus $A. \mathfrak{J}. P + AK (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}. P)$

$$- AM + \left(\frac{AN - AP - A (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}. P)}{2} \right) (\sigma - u) -$$

$$- \frac{AF}{3} (\sigma - u)^2 = 0,$$

$$P = -\mathfrak{A}K + M - \frac{N}{2} (\sigma - u) + \frac{\mathfrak{A}}{2} (\sigma - u) + \frac{F}{3} (\sigma - u)^2$$

$$\mathfrak{J} - K\mathfrak{B} - \frac{(\sigma - u)}{2} + \frac{\mathfrak{B} (\sigma - u)}{2}$$

Durch gehörige Substitutionen erhalten wir hier folgende zwei Gleichungen:

Damit m in derselben Horizontalen s B' liege als s, muss seyn:

$$\text{X. } P = \frac{\left(\frac{1}{2}Lv - v\sigma - Lu - v^2 + \frac{v^2\sigma}{3L} + 2vu - \frac{vu\sigma}{3L} + \frac{L\sigma}{2} + \frac{v^3}{3L} + \frac{v\sigma^2}{3L} - \frac{v^2u}{3L} - \frac{u\sigma^2}{3L} \right)}{\sigma^2 - \sigma u - \sigma v + vu}$$

Damit n in derselben Horizontalen s A' liege als s, muss seyn:

$$\text{XI. } P = \frac{\left(0 - Lv - v\sigma - \frac{1}{2}Lu + 0.v^2 + \frac{0.v^2\sigma}{L} + vu + \frac{vu\sigma}{3L} + \frac{1}{2}L\sigma + \frac{0.v^3}{L} + \frac{v\sigma^2}{3L} + 0.\frac{v^2u}{L} - \frac{u\sigma^2}{3L} - \frac{u^2\sigma}{3L} + \frac{u^2v}{3L} - \frac{u^3}{3L} \right)}{\sigma^2 - \sigma u - \sigma v + vu}$$

Da in den Gleichungen X. und XI. das P zweierlei Werthe hat, so kann ein durch 3 Gewichte $\mathfrak{R} - x$, P , $\mathfrak{P} - y$ in Fäden (in m , s , n angebracht) hängender Balken, der von der horizontalen Geraden nur sehr unmerklich abweicht, nie so hängen, dass m , s , n genau in einerlei Horizontale $A's B'$ fielen, ausser wenn $\sigma = \frac{\zeta}{2}$, und $v = \zeta - u$, d. h. wenn der Balken in seinem Mittelpunkte o und beiderseits in gleichen Abständen vom Mittelpunkte aufgehangen wird; denn dass in diesem Falle durch einerlei Werth von P sowohl m als n in der Horizontalen, die durch s läuft, erhalten werden, folgt daraus, dass dann beiderseits die Abstände gleich sind; man überzeugt sich aber auch davon, wenn man in die Gleichungen X. und XI. $\sigma = \frac{\zeta}{2}$ und $v = \zeta - u$ substituirt, welches Letztere zugleich eine Probe für die Richtigkeit unserer Rechnung abgiebt.

Nehmen wir bei einem auf drei fixen Unterlagen (deren Köpfe in einerlei Horizontallinie liegen) liegenden Balken an, dass er hart genug sey, um dem Eindringen der

Köpfe in das Holz so heftig zu widerstehen, dass seine Bestimmung ist, horizontal so zu liegen, dass die Summe der Abweichungen der Punkte m und n von der durch s gezogenen Horizontalen A's B' so gering wie möglich sey, so wird der Druck P der Unterlage s allemal den zur Erreichung dieses Endzwecks erforderlichen Werth behaupten. Liegt s im Mittelpunkte des Balkens, und sind m, n von s gleichweit entfernt, so gibt es einen Werth für P, bei welchem besagte Abweichung ganz Null ist; es wird also in diesem Falle P diesen Werth behaupten, nemlich jenen, den man aus der Gleichung X. oder aus jener XI. erhält, wenn man darin $\sigma = \frac{\xi}{2}$ und $v = \xi - u$ substituirt. Diess ist auch für die Anwendung der Fall, wo es am interessantesten ist, zu wissen, wie stark jede der drei Unterlagen gedrückt werde. Weniger wichtig ist die Untersuchung über die Drucke der drei Unterlagen m, s, n, wenn m s und n s ungleich, und wenn s ausser der Mitte des Balkens liegt. Auch ist für diesen Fall die Bestimmung der Drucke auf m, s, n äusserst schwierig, und vielleicht

gar unmöglich. Ich wage es hierüber nur so viel zu sagen. Ist s nur sehr wenig von der Mitte des Balkens entfernt, und ist ms von ns nur sehr wenig verschieden, so wird P fast jenen Werth haben, als ob $ms = ns$ wäre, und s in der Mitte läge; es lässt sich also dann P ungefähr bestimmen. Ist s sehr viel von der Mitte entfernt, so dass z. B. As weit grösser als sB ausfällt, ist zugleich ns weit grösser als sm , so muss P vorzüglich jenen Werth annehmen (Gleichung XI.), wodurch n in einerlei Horizontale mit s gelangt, da m ohnediess davon nicht viel abweichen kann.

Für den Fall, wo s in der Mitte des Balkens liegt, und $ns = sm = E$ ist, haben wir die Gleichung

$$\text{XII. } P = \frac{G}{E} \left(2E - \frac{\zeta}{2} - \frac{2}{3} \frac{E^2}{\zeta} \right).$$

Hieraus lassen sich nun manche interessante Folgerungen ableiten. Es ist bei dem besagtermaassen unterstützten Balken $\mathfrak{P} - y$

$$= \mathfrak{R} - x = \frac{G - P}{2} = \frac{G}{2} \left(1 - \frac{1}{E} \left(2E - \frac{\zeta}{2} - \frac{2}{3} \frac{E^2}{\zeta} \right) \right);$$

soll also $\mathfrak{P} - y = \mathfrak{R} - x = P$ seyn, d. h.

sollen alle 3 Unterlagen n, s, m gleich viel zu tragen haben, so muss seyn:

$$\frac{\mathfrak{G} \left(1 - \frac{1}{E} \left(2E - \frac{\mathfrak{z}}{2} - \frac{2}{3} \frac{E^2}{\mathfrak{z}} \right) \right)}{2} =$$

$$= \frac{\mathfrak{G}}{E} \left(2E - \frac{\mathfrak{z}}{2} - \frac{2}{3} \frac{E^2}{\mathfrak{z}} \right) \text{ woraus folgt, } E=2,$$

105 $\mathfrak{z}$ oder $E=0$, 55. $\mathfrak{z}$, wo nur der letztere Werth hier anwendbar ist.

Ist ein Balken in seiner Mitte und an seinen 2 äussersten Enden unterstützt, so folgt (Gleichung XII.) $P = \frac{2}{3} \mathfrak{G}$, daher $\mathfrak{K} - x = \mathfrak{P} - y = \frac{1}{6} \mathfrak{G}$, welches von dem Falle verschieden ist, wo der Balken in s auseinander gesägt wäre, denn dann wäre $P = \frac{1}{2} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{K} - x = \frac{1}{4} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P} - y = \frac{1}{4} \mathfrak{G}$. Messen wir in diesem Falle $\mathfrak{E}$ von der mittlern Stütze an, so ist

$$\varphi = \frac{3 \cdot q \cdot o p \cdot n}{1 \cdot \delta \cdot H^3} \left(\frac{\mathfrak{G} \mathfrak{z}}{8} - \frac{P \mathfrak{z}}{4} + \frac{P \mathfrak{E}}{2} - \frac{\mathfrak{G} \mathfrak{E}^2}{2 \mathfrak{z}} \right) =$$

$$= \frac{3 \cdot q \cdot o p \cdot n}{1 \cdot \delta \cdot H^3} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{z}} \left(-\frac{\mathfrak{z}^2}{24} + \frac{1}{3} \mathfrak{z} \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^2 \right), \text{ also}$$

am grössten in einer Entfernung von der mittlern Stütze $\mathfrak{E} = \frac{1}{6} \mathfrak{z}$; bricht also der in der Mitte und an seinen äussersten Enden unterstützte Balken irgendwo, so geschieht es $\frac{1}{6} \mathfrak{z}$ weit vom Mittelpunkte

rechts und links. Da aus (XII.) folgt: $P = 0$ für $E = (3 - \sqrt{6}) \frac{1}{2} \lambda$, $P = +$ für $E > (3 - \sqrt{6}) \frac{1}{2} \lambda$, $P = -$ für $E < (3 - \sqrt{6}) \frac{1}{2} \lambda$, so sieht man, dass bei einem Balken, welcher bloß auf zwey Unterlagen in gleichen Abständen E und E vom Mittelpunkte ruht, der Mittelpunkt der untern Balkenfläche entweder *in* oder *unter* oder *über* der durch die Köpfe der Unterlagen gezogenen Horizontallinie zu stehen komme, je nachdem $E =$ oder $>$ oder $< (3 - \sqrt{6}) \frac{1}{2} \lambda$ ist.

Grundlehren
der
Variationsrechnung.

CRIMINAL

LIBRARY

Eine
eigene Darstellung der Grundbegriffe
der
Variationsrechnung.

Die Variationsrechnung bietet für ein tiefes Eindringen in die Geheimnisse der Naturgesetze, also für den höchsten und würdigsten Genuss, dessen der intellektuelle Theil des Menschen empfänglich ist, ein so weites Feld dar, gibt selbst der Einbildungskraft des nach Verhältnissserkenntnissen strebenden Geistes einen so hohen Schwung, dass Jeder, der von dieser Rechnungsart nur einige Begriffe hat, den heftigen Wunsch in sich hegen muss, die eigentliche Natur jenes Werkzeuges zu ergründen, wodurch es dem Menschen gelungen ist, einem eingebildeten Punkte, unter allen denkbaren Bahnen, gerade jene bestimmen zu können, bei welcher eine von dem Gesetze dieser

Bahn abhängige Funktion, unter übrigens gegebenen Begrenzungen, den grössten und kleinsten Werth erhält, wenn sie nicht, ihrer Wesenheit nach, eines grössten oder kleinsten Werthes unfähig ist. Aber auch selbst diese Unfähigkeit ist die Variationsrechnung zu enthüllen im Stande.

Die Grundlehren dieser hohen abstrakten Rechnungsart, auf eine kurze leicht fassliche Art, blos als eine Quelle weiterer Folgerungen bei deren Anwendung auf einzelne Beispiele, hier darzustellen, ist mein Endzweck. Ich glaube hierzu einen eigenen Weg der Gedankenfolge eingeschlagen zu haben, auf welchem es vielleicht Manchem leichter werden möchte, diese Rechnungsart gründlich zu fassen, als ihm dieses nach den bisher beim Vortrage der Variationsrechnung üblichen Methoden geworden ist *).

*) Hierdurch will ich die bisherigen Methoden im Vortrage der Variationsrechnung keineswegs einer Undeutlichkeit beschuldigen, indem ich das Gesagte blos auf den subjektiven Zustand der Schüler der Variationsrechnung beziehe, bei welchen eine *Individualität in der Methode des Denkens* angenommen werden muss.

Meinem angesetzten Ziele gemäss, habe ich mich in Anwendung auf Beispiele nur sehr kurz gefasst, und habe gerade nur jene zwei Aufgaben der Variationsrechnung entwickelt, welche zu den allereinfachsten ihrer Art gehören.

Ist (Fig. 1.) die Gleichung zwischen der Abscisse x und der senkrechten Ordinate y bestimmt, so ist es auch der Ausdruck $\int F(x, y, dx, dy)$ und kann allemal gefunden werden, wenn die Kunst der Integralrechnung hinreicht, den Differentialausdruck $F(x, y, dx, dy)$ zu integrieren, wo dann der Ausdruck $F(x, y, dx, dy)$ sich allemal auf irgend eine festgesetzte, der Abscisse x , oder der Ordinate y , oder dem Punkte C der gegebenen Kurven AB entsprechende Funktion bezieht.

Ist hingegen (Fig. 2.) die Gleichung zwischen der Abscisse x und senkrechten Ordinate y nicht bestimmt, heisst nemlich y die senkrechte Ordinate $GC, GC', GC'', \dots$ der Abscisse x , ohne Rücksicht auf die Gleichung zwischen x und y , d. h. ohne Rücksicht auf den Lauf der Kurven $AB, AB', AB'',$ u. s. w., so ist der der Abscisse x entsprechende Ausdruck $F(x, y, dx, dy)$

noch gänzlich unbestimmt, und jener $F(x, y, dx, dy)$ ein *seiner Natur nach* (nicht ein aus Unvollkommenheit der bisherigen Integrirungsmethoden) unintegrabler Differentialausdruck. Es bezieht sich dann der Ausdruck $F(x, y, dx, dy)$ auf eine, allen diesen verschiedenen Kurven, einem und demselben x , entsprechende Funktion, z. B. auf die dem x entsprechende Tangente, allgemein für alle denkbaren Kurven, d. h. für alle denkbaren Gleichungen zwischen x und y . Der Ausdruck: $\int F(x, y, dx, dy)$ ist allemal eine bloß angesetzte Aufgabe, welche noch aufzulösen ist. Die Auflösbarkeit dieser Aufgabe erstreckt sich aber entweder auf ein vollendetes Rechnungsergebnis, oder bloß auf eine Definition.

Unter allen Umständen ist $\int F(x, y, dx, dy)$ etwas veränderliches; dessen Veränderlichkeit bezieht sich jedoch auf zweierlei Gesichtspunkte; entweder auf die Veränderlichkeit der Abscisse x (bei steter Gleichung zwischen x und y), oder auf die Veränderlichkeit der Gleichung zwischen x und y (bei einerlei Werth von x). Diese letzte Rücksicht begründet das Daseyn der Variationsrechnung.

So wie man, bei einer angenommenen Gleichung zwischen x und y , eine einem steten Gesetze unterworfenene Veränderlichkeit für den Ausdruck $f F (x, y, dx, dy) = \varphi (x, y)$ dadurch erhält, dass man dem x nach und nach verschiedene Längen nach einem steten Gesetze beilegt, *aber von einer unbestimmt ausgedrückten Länge x ausgeht*, eben so kann man eine einem steten Gesetze unterworfenene Veränderlichkeit für den Ausdruck $F (x, y, dx, dy)$, den man auf einen beständigen Werth von x bezieht, erhalten, indem man die Gleichung zwischen x und y nach einem steten Gesetze ändert, dabei *aber von einer unbestimmt ausgedrückten Grundgleichung zwischen x und y ausgeht*.

Betrachten wir (Fig. 1.) irgend eine Funktion von x , und drücken sie durch $f(x)$ aus, so ändert sich dieser Ausdruck nach folgendem Gesetze, wenn x nach einander die Werthe $x, x + dx, x + dx + d(x + dx), x + dx + d(x + dx) + dx + d dx + dd(x + dx)$ u. s. w., oder $x, x + dx, x + dx + dx + d dx, dx + dx + d dx + dx + d dx + d dx + d dx$, u. s. w. . . . erhält, nemlich $f(x), f(x) + df(x), f(x) + df(x) + df(x) +$

$+ d d f(x), f(x) + d f(x) + d f(x) + d d f(x) +$
 $+ d f(x) + d d f(x) + d d f(x) + d d d f(x),$ u. s. w.

Hierauf gründet sich die merkwürdige Tailor'sche Formel, welche *La Grange* in seiner Theorie *des fonctions analytiques* nur auf eine andere Art bezeichnet, und auf einem andern Wege sucht als Tailor. Man bemerke, dass obige veränderte Ausdrücke dieselben sind als folgende: $f(x), f(x + dx), f(x + dx + d(x + dx)), f(x + dx + d(x + dx) + d(x + dx + d(x + dx))),$ u. s. w.; ferner dass der Buchstabe d in $x, x + dx, \dots$ eine durchaus gleiche Ableitungsmethode, eben so in $f(x), f(x) + d f(x),$ u. s. w. eine durchaus gleiche Ableitungsmethode bezeichne.

Wir wollen nun die Veränderlichkeit des dem $x = EG$ und dem $dx = GH$ entsprechenden Differentialausdrucks $F(x, y, dx, dy)$ bloß in Bezug der Veränderlichkeit der Gleichung zwischen x und y betrachten, indem wir von einer unbestimmt gedachten Gleichung zwischen x und y ausgehen, welche Gleichung wir dadurch als einen Merkpfehl unserer Untersuchungen auf eine unbestimmte allgemeine Art festsetzen, dass wir

(Fig. 2.) die Kurve AB als die dieser Gleichung entsprechende Kurve annehmen *).

Es nehme $y = GC$ nach einander folgende unendlich wenig von einander verschiedene Werthe, nach einem steten Gesetze an y , $y + \delta y$, $y + \delta y + \delta y + \delta \delta y$, $y + \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta \delta y + \delta \delta \delta y$, $y + \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta \delta y + \delta \delta \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta \delta y + \delta \delta \delta y + \delta \delta y + \delta \delta \delta y + \delta \delta \delta y$, u. s. w., wobei wir unter dem Zeichen δ weiter nichts, als eine allgemeine, unbestimmte, aber durchaus gleiche Ableitungsmethode verstehen, so dass das Zunehmen von y nach folgendem Ge-

*) Was hier von $x = EG$ gesagt wird, bezieht sich allemal auch auf jeden andern Werth von x , so dass, wenn man y für $x = EG$ nach irgend einem Gesetze zunehmen lässt, allemal schon vorausgesetzt wird, dass das Zunehmen nach demselben Gesetze bei allen nur denkbaren Ordinaten y der betrachteten Kurven zugleich vor sich gehe, so dass nach jedem Zunehmen aller Ordinaten y , die Gleichung zwischen x und der dazu gehörigen veränderten Ordinate y , dieselbe ist, man mag von welcher immer zusammengehörigen Ordinaten x und y sprechen. Jede Veränderung der dem $x = EG$ entsprechenden Ordinate bewirkt eine Veränderung im ganzen Laufe der Kurven; nach jeder solchen Veränderung ist aber die Kurve in allen ihren Punkten einerlei stetem Gesetze unterworfen.

setze vor sich geht: Leite aus y auf irgend eine Art ab den unendlich kleinen Werth δy , und addire δy zu y , diess gibt $y + \delta y$; ferner leite aus y auf dieselbe Art ab δy , und aus δy auf dieselbe Art ab $\delta \delta y$, addire $\delta \delta y$ und δy zusammen, und addire diese Summe zu $y + \delta y$, diess gibt $y + \delta y + \delta y + \delta \delta y$; ferner leite aus y auf dieselbe Art ab δy , aus δy auf dieselbe Art ab $\delta \delta y$, aus δy auf dieselbe Art ab $\delta \delta y$, aus $\delta \delta y$ auf dieselbe Art ab $\delta \delta \delta y$, addire δy , $\delta \delta y$, $\delta \delta y$, $\delta \delta \delta y$ zusammen, und addire $\delta y + \delta \delta y + \delta \delta y + \delta \delta \delta y$ zu $y + \delta y + \delta y + \delta \delta y$, diess gibt $y + \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta \delta y + \delta \delta \delta y$ ferner, u. s. w.; welches im Grunde so viel heisst als: Leite auf irgend eine Art ab δy , und addire δy zu y ; ferner leite aus $y + \delta y$ auf dieselbe Art ab $\delta y + \delta \delta y$ und addire $\delta y + \delta \delta y$ zu $y + \delta y$; ferner leite aus $y + \delta y + \delta y + \delta \delta y$ auf dieselbe Art ab $\delta y + \delta \delta y + \delta \delta y + \delta \delta \delta y$ und addire diess zu $y + \delta y + \delta y + \delta \delta y$; ferner u. s. w. Wir wollen Kürze halber die Ausdrücke δy , $\delta \delta y$, $\delta \delta \delta y$, ... (welche blos angesetzte Aufgaben sind, die, ihrer Allgemeinheit wegen, *durch Rechnung* zwar nicht auflösbar sind, nichts destowe-

niger aber sehr bestimmte Verstandsbegriffe bezeichnen) folgendermaassen benennen: Variation y , Variation von Variation y , Variation von Variation von Variation y , ..., oder Variation y , 2te Variation y , 3te Variation y , ..., statt zu sagen: Aus y auf irgend eine Art abgeleitete Funktion, aus y auf dieselbe Art abgeleitete Funktion und hieraus auf dieselbe Art abgeleitete Funktion, aus, ferner wollen wir Kürze halber $\delta\delta y = \delta^2 y$, $\delta\delta\delta y = \delta^3 y$, $\delta\delta\delta\delta y = \delta^4 y$, ... setzen.

Nun ist einleuchtend, dass durch das Verändern von y nach der Ordnung y , $y + \delta y$, $y + \delta y + \delta y + \delta\delta y$, $y + \delta y + \delta y + \delta\delta y + \delta y + \delta\delta y + \delta\delta y + \delta\delta\delta y$ u. s. w. der, einerlei x und dx entsprechende Differentialausdruck $F(x, y, dx, dy)$, sich zu gleicher Zeit nach einem steten Gesetze ändern müsse, welches sich muss so ausdrücken lassen, $F(x, y, dx, dy)$, $F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy)$, $F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta\delta F(x, y, dx, dy)$, $F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta\delta F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta\delta F(x, y, dx, dy) + \delta\delta F(x, y, dx, dy) +$

+ $\delta \delta \delta F(x, y, dx, dy)$, u. s. w., worin δ abermals eine durchaus *gleiche* aber unbestimmte allgemeine Ableitungsmethode andeutet, wobei aber δ im Ausdrucke $\delta F(x, y, dx, dy)$ nicht eben dieselbe Ableitungsmethode aus $F(x, y, dx, dy)$ bedeutet, wornach δy aus y derivirt ist. Es ist nemlich $\delta \delta F(x, y, dx, dy)$ ein aus $\delta F(x, y, dx, dy)$ eben so hergeleiteter Ausdruck, als $\delta F(x, y, dx, dy)$ ein aus $F(x, y, dx, dy)$ hergeleiteter Ausdruck ist, u. s. w. eben so ist $\delta \delta y$ ein aus δy eben so hergeleiteter Ausdruck, als δy aus y , u. s. w. Es muss aber nicht $\delta F(x, y, dx, dy)$ ein aus $F(x, y, dx, dy)$ eben so hergeleiteter Ausdruck seyn, als δy ein aus y hergeleiteter Ausdruck ist. Wir legen hier den Worten Variation $F(x, y, dx, dy)$, zweite Variation $F(x, y, dx, dy) \dots$ einen ähnlichen Sinn bei, als den Worten: Variation y , 2te Variation $y, \dots$, und bezeichnen $\delta \delta F()$ durch $\delta^2 F()$, $\delta \delta \delta F()$ durch $\delta^3 F()$, $\dots$

Durch das eben Gesagte wäre vor der Hand der Sinn des Zeichens δ , oder des Wortes Variation, ferner die Relation jener Gesetze unter einander, nach welchen

die Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate, und zu gleicher Zeit eine von diesen zwei Argumenten abhängige Funktion verändert werden, begründet.

Stellen wir uns vor, es stehe die, einem steten Gesetze unterworfenen Veränderlichkeit der Gleichung zwischen x und y , d. h. die einem steten Gesetze unterworfenen Veränderlichkeit der Ordinate $y = G C$, mit einem, aus α nach der positiven oder negativen Richtung $\alpha\beta$ oder $\alpha\gamma$, sich gleichförmig bewegendem Punkte dergestalt im Zusammenhange, dass eben erwähnte auf einander folgende Werthe von y (nemlich $y, y + \delta y, y + \delta y + \delta y + \delta \delta y, \dots$) und die zugleich statt findenden Ausdrücke für $F(x, y, dx, dy)$ nemlich $F(x, y, dx, dy), F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy), F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) + \delta \delta F(x, y, dx, dy), \dots$: an den Enden jener unendlich kleinen Zeiten bestehen, wo der bewegte Punkt die unendlich kleinen Räume $\delta y, 2\delta y, 3\delta y, \dots$ beschrieben hat, so haben y und $F(x, y, dx, dy)$ in jenen Augenblicken, wo erwähnter Punkt den Raum $n\delta y$ beschrieben hat, folgende Werthe:

$$y + n \delta y + \frac{n(n-1)}{2} \delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \delta^3 y + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \delta^4 y + \dots$$

und

$$F(x, y, dx, dy) + n \delta F(x, y, dx, dy) + \frac{n(n-1)}{2} \\ \times \delta^2 F(x, y, dx, dy) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \delta^3 F(x, y, \\ dx, dy) + \dots$$

Substituiren wir daher statt n die un-
endlich grosse Zahl $\frac{\omega}{\delta y}$, so erhalten wir jene

Werthe von y und von $F(x, y, dx, dy)$,
welche dem vom Punkte durchlaufenen end-
lichen Raume ω entsprechen, nemlich

$$y + \frac{\omega \delta y}{\delta y} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta y^2} + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\delta^3 y}{\delta y^3} + \\ + \frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\delta^4 y}{\delta y^4} + \dots \text{ und } F(x, y, dx, dy) + \\ + \omega \frac{\delta F(x, y, dx, dy)}{\delta y} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^2} + \\ + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{\delta^3 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^3} + \\ + \frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\delta^4 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^4} + \dots \text{ woraus}$$

man die Werthe von y und $F(x, y, dx, dy)$ erhält, welche einen endlichen negativen (vom Punkte) durchlaufenen Raume entsprechen, wenn man $-\omega$ statt ω substituirt, wodurch *nur jene Glieder negativ werden, worin ω zu einer ungeraden Potenz erhoben ist.*

Es gibt allemal einen endlichen Werth, der klein genug ist, dass er, oder jeder kleinere, in obiger Reihe statt ω substituirt, das Glied, worin ω vorkömmt, grösser als die Summe aller folgenden Glieder macht; eben so gibt es einen endlichen Werth, der klein genug ist, dass er, oder jeder kleinere, in obiger Reihe statt ω substituirt, das Glied, worin ω^2 vorkömmt, grösser als die Summe aller folgenden macht, eben so u. s. w. Es ist also $F(x, y, dx, dy)$ so beschaffen, dass durch das Bewegen des Punkts um den sehr kleinen Raum $+\omega$ sowohl, als um jenen $-\omega$, der Differentialausdruck $F(x, y, dx, dy)$, also auch die Summe aller, der Abscisse x entsprechenden, $F(x, y, dx, dy)$, d. h. $\int F(x, y, dx, dy)$, abnimmt, oder aber zunimmt, wenn die an-

genommene Grundgleichung zwischen x und y von der Art ist, dass $\frac{\delta F(x, y, dx, dy)}{\delta y} = 0$,
 und $\frac{\delta^2 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^2} = -$, u. s. w., oder aber,
 dass $\frac{\delta F(x, y, dx, dy)}{\delta y} = 0$ und $\frac{\delta^2 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^2} = +$,
 u. s. w., in welchen Fällen aber der Ausdruck $\int F(x, y, dx, dy)$ ein max. oder min. ist, nach folgendem einleuchtenden Grundsatz:
 Wenn zwischen x und y eine solche Gleichung besteht, dass die von diesen zwei Argumenten abhängige Funktion $\int F(x, y, dx, dy)$ abnimmt, man mag diese Gleichung nach welcher immer einem steten Gesetze auf *entgegengesetzte Art* sehr wenig ändern, so ist der Ausdruck $\int F(x, y, dx, dy)$ bei dieser Gleichung ein max., und umgekehrt.

Hieraus folgt der wichtige Lehrsatz der Variationsrechnung: Der Ausdruck $\int F(x, y, dx, dy)$ ist ein max. bei jener Gleichung zwischen x und y , wobei man erhält $\frac{\delta F(x, y, dx, dy)}{\delta y} = 0$,
 und $\frac{\delta^2 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^2} = -$, oder wobei man

erhält $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0, \frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = 0, \frac{\delta^3 F(\quad)}{\delta y^3} = 0,$
 $\frac{\delta^4 F(\quad)}{\delta y^4} = \dots$ u. s. w.

Hingegen ist der Ausdruck $\int F(x, y, dx, dy)$ ein min. bei einer Gleichung zwischen x und y , wobei man erhält u. s. w. Um nun zur Bestimmung solcher maxima und minima von den angeführten Lehrsätzen eine Anwendung machen zu können, kommt es vorzüglich darauf an, die Ableitungsart allgemein zu bestimmen, wornach $\delta F(x, y, dx, dy)$ aus $F(x, y, dx, dy)$ erhalten wird.

Da $F(x, y, dx, dy)$ durch die Verwandlung von y in $y + \delta y$ verwandelt wurde in $F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy)$, so ist eigentlich $F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy)$ der betrachtete Differentialausdruck für einerlei x und dx , aber für $y + \delta y$, und $d(y + \delta y)$. Es ist also $F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) = F(x, y + \delta y, dx, d(y + \delta y))$, woraus folgt $\delta F(x, y, dx, dy) = F(x, y, \delta y, dx, d(y + \delta y)) - F(x, y, dx, dy)$, d. h. es wird $\delta F(x, y, dx, dy)$ aus $F(x, y, dx, dy)$ erhalten, wenn man $F(x, y, dx, dy)$ in Bezug auf y und dy durch das Zeichen δ

(statt durch das Zeichen d) differenziert, und δdy und $d\delta y$ als gleichbedeutend betrachtet.

Wäre z. B. $F(x, y, dx, dy) = xdy + ydx$, so wäre $\delta F(x, y, dx, dy)$ oder $\delta(xdy + ydx) = x d(y + \delta y) + (y + \delta y) dx - xdy - ydx = xdy + x d\delta y + ydx + \delta y dx - xdy - ydx = x d\delta y + dx \delta y$. Differenziert man aber $x dy + y dx$ mit dem Zeichen δ blos in Bezug auf y und dy , so erhält man $x \delta dy + dx \delta y$, welcher Ausdruck mit obigen übereinstimmt, wenn man δdy mit $d\delta y$ als gleichbedeutend nimmt. Ist $\delta F(x, y, dx, dy)$ der durch das Zeichen δ in Bezug auf y und dy differenzierte Ausdruck $F(x, y, dx, dy)$, so ist $\delta^2 F(x, y, dx, dy)$ oder $\delta \delta F(x, y, dx, dy)$ der durch das Zeichen δ in Bezug auf y und dy differenzierte Ausdruck $dF(x, y, dx, dy)$, u. s. w.

Die sich hieraus ergebende Methode, jene Gleichung zwischen x und y zu finden, bei welcher die irgend einem Werthe von x entsprechende Funktion $F(x, y, dx, dy)$ zu einem max. oder min. wird, wollen wir die *erste Methode* oder die Methode mittelst des Variirens in Bezug auf y und dy nennen.

Bei Erwägung des bisher Gesagten, und bei einigem Nachdenken wird folgendes leicht zu begreifen seyn.

Hätte man das Gesetz der Veränderlichkeit der Gleichung zwischen x und y dadurch ausgedrückt, dass man angenommen hätte, es habe sich, binnen jenen unendlich kleinen Zeittheilchen, während welchen der bewegliche Punkt von α aus, nach $\alpha\beta$, die unendlich kleinen Räume $\delta y, \delta y, \delta y, \dots$ durchlief, x folgendermaassen geändert: $x, x + \delta x, x + \delta x + \delta x + \delta \delta x, x + \delta x + \delta x + \delta \delta x + \delta x + \delta \delta x + \delta \delta x + \delta \delta \delta x, u. s. w.,$ und es habe sich zugleich das diesem successiven Werth von x entsprechende y folgendermaassen geändert: $y, y + \delta y, y + \delta y + \delta y + \delta \delta y, y + \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta y + \delta \delta y + \delta \delta y + \delta \delta \delta y, u. s. w.,$ so hätte auch der Differentialausdruck $F(x, y, dx, dy)$, welcher an den Enden besagter Zeittheilchen den successiven Werthen von x (nemlich $x, x + \delta x, x + \delta x + \delta x + \delta \delta x, u. s. w.)$ entsprochen haben möchte, sich nach einem steten Gesetze ändern müssen, welches Gesetz sich auf folgende Art muss darstellen lassen: $F(x, y, dx, dy), F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy), F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) +$

$+ \delta F(x, y, dx, dy) + \delta \delta F(x, y, dx, dy)$, u. s. w.
 Nach dieser Vorstellungsart hätte daher dem
 vom bewegten Punkte durchlaufenen endli-
 chen Raume ω eine solche Gleichung zwischen
 Abscisse und Ordinate entsprochen, dass die
 Ordinate der Abscisse $x + \frac{\omega \delta x}{\delta y} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 x}{\delta y^2} +$
 $+ \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{\delta^3 x}{\delta y^3} + \dots$ folgende gewesen
 wäre $y + \frac{\omega \delta y}{\delta y} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 y}{\delta y^2} + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{\delta^3 y}{\delta y^3} + \dots$,
 und dass der betrachtete Differentialaus-
 druck, welcher der Abscisse $x + \frac{\omega \delta x}{\delta y} +$
 $+ \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 x}{\delta y^2} + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{\delta^3 x}{\delta y^3} + \dots$ zugehört
 hätte, folgender gewesen wäre: $F(x, y, dx, dy)$
 $+ \frac{\omega \delta F(x, y, dx, dy)}{\delta y} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^2}$
 $+ \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{\delta^3 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^3} + \frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\delta^4 F(x, y, dx, dy)}{\delta y^4}$
 $+ \dots$, woraus der der Abscisse
 $x + \frac{\omega \delta x}{\delta y} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 x}{\delta y^2} + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{\delta^3 x}{\delta y^3} + \dots$ und
 dem vom Punkte durchlaufenen Raume $-\omega$
 entsprechende Differentialausdruck erhalten
 wird, wenn man darin $-\omega$ statt ω substi-

tuirt. Der betrachtete Differentialausdruck $F(x, y, dx, dy)$ (dessen Veränderlichkeit sich auf die Veränderlichkeit des Werthes von x sowohl, als auf die Veränderlichkeit der Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate bezieht) nimmt also nach dieser letzten Vorstellungsort des Variirens durch das Bewegen des Punktes um den sehr kleinen positiven sowohl als negativen Raum $+\omega$ und $-\omega$ an Grösse ab, wenn die Grundgleichung zwischen x und y so beschaffen ist, dass $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$, und $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = -$, oder dass $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$, $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = 0$, $\frac{\delta^3 F(\quad)}{\delta y^3} = 0$, und $\frac{\delta^4 F(\quad)}{\delta y^4} = -$, u. s. w. hingegen zu, wenn die Grundgleichung zwischen x und y so beschaffen ist, dass $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$, und $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = +$, oder dass $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$, $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = 0$, $\frac{\delta^3 F(\quad)}{\delta y^3} = 0$, und $\frac{\delta^4 F(\quad)}{\delta y^4} = +$, u. s. w. wird, in welchen zweierlei Fällen, der irgend einem Werthe von x entsprechende Ausdruck $\int F(x, y, dx, dy)$ (rück-

sichtlich der Veränderlichkeit bloß der Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate) ein max. oder ein min. ist. Denn ist die erwähnte Gleichung so beschaffen, daß man allgemein bei jeden zwei zugleich statt findenden Ableitungsmethoden δx und δy , erhält $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$ und $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = -$ so erhält man diess Resultat auch dann, wenn δx jene Ableitungsmethode andeutet, wodurch $x + \delta x$ soviel als x , eben so $x + \delta x + \delta \delta x$ soviel als x ist, wodurch also während dem Bewegen des Punktes, die Abscisse x unverändert bleibt, so daß also, wenn der Punkt die entgegengesetzten sehr kleinen Räume $+\omega$ und $-\omega$ beschrieben hat, bloß die Gleichung zwischen x und y so geändert wurde, daß der Abscisse $= x$ entspricht die Ordinate

$$y \pm \frac{\omega \delta y}{\delta x} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \pm \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} + \dots,$$

und der Abscisse $= x$ entspricht der Differentialausdruck $F(x, y, dx, dy) \pm \omega \cdot \frac{\delta F(\quad)}{\delta x} +$

$$+ \frac{\omega^2 \delta^2 F(\quad)}{2 \cdot \delta x^2} \pm \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \frac{\delta^3 F(\quad)}{\delta x^3} + \dots, \text{ welcher Ausdruck, [daher auch } \int F(x, y, dx, dy)]$$

ein max., wenn $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$ und $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = -$,
u. s. w.

Wir ersehen hieraus den Lehrsatz, dass die irgend einem x entsprechende Funktion $f F(x, y, dx, dy)$, blos in Bezug der Grundgleichung zwischen Abscisse und Ordinate, ein max. sey, wenn diese Grundgleichung so beschaffen ist, dass hiedurch $\frac{\delta F(x, y, dx, dy)}{\delta y} = 0$, und $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = -$, oder $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$, $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y} = 0$, $\frac{\delta^3 F(\quad)}{\delta y^3} = 0$, und $\frac{\delta^4 F(\quad)}{\delta y^4} = -$, u. s. w. wird. Dass diese Funktion hingegen ein min. sey, wenn besagte Grundgleichung so beschaffen ist, dass hiedurch $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$, und $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = +$, oder $\frac{\delta F(\quad)}{\delta y} = 0$, $\frac{\delta^2 F(\quad)}{\delta y^2} = 0$, $\frac{\delta^3 F(\quad)}{\delta y^3} = 0$, und $\frac{\delta^4 F(\quad)}{\delta y^4} = +$, u. s. w. wird.

Um nun zur Bestimmung solcher max. und min. von dem eben angeführten Lehr-

sätze eine Anwendung machen zu können, kommt es vorzüglich darauf an, die Ableitungsart allgemein zu bestimmen, wornach $\delta F()$ aus $F()$ erhalten wird.

Es ist $F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy)$ jener Differentialausdruck, welcher dem vom Punkte durchlaufenen Raume δy entspricht, also (der hier angenommenen Betrachtung gemäss) jener Differentialausdruck, welcher entspricht der Abscisse $x + \delta x$, der Ordinate $y + \delta y$, dem Differential von $x + \delta x$, nemlich $d(x + \delta x)$ und dem Differentialausdruck von $y + \delta y$, nemlich $d(y + \delta y)$ *); also ist $F(x, y, dx, dy) + \delta F(x, y, dx, dy) = F((x + \delta x), (y + \delta y), d(x + \delta x), d(y + \delta y))$ woraus folgt $\delta F(x, y, dx, dy) = F((x + \delta x), (y + \delta y), (dx + d\delta x), (dy + d\delta y)) - F(x, y, dx, dy)$. Es wird also hier $\delta F()$ aus $F()$ erhalten, wenn man $F()$ mit dem Zeichen δ in Bezug auf x, y, dx, dy differenzirt, und die Ausdrücke $d\delta x$ und δdx , eben so jene $d\delta y$ und δdy , als gleichbedeutend nimmt.

*) Wir nehmen an, es seyen in dem Differentialausdrucke $F(x, y, dx, dy)$, sowohl dx als dy veränderliche Inkremente, d. h. dx vom Werthe von x , und dy vom Werthe von y abhängig.

Die sich hieraus ergebende Methode, jene Gleichung zwischen x und y zu finden, bei welcher die irgend einem x entsprechende Funktion $\int F(x, y, dx, dy)$, zu einem max. oder min. wird, wollen wir die *zweite Methode*, oder die Methode mittelst des Variirens in Bezug auf y , dy , x , und dx nennen,

Hätte man die durch die Veränderlichkeit der Gleichung zwischen x und y nach der ersten Methode veränderten Werthe von $\int F(x, y, dx, dy)$ statt jener von $F(x, y, dx, dy)$ betrachtet, so hätten sich diese Werthe so ansetzen lassen: $\int F(x, y, dx, dy)$, $\int F(x, y, dx, dy) + \delta \int F(x, y, dx, dy)$, $\int F(x, y, dx, dy) + \delta \int F(x, y, dx, dy) +$ $+ \delta \int F(x, y, dx, dy) + \delta \delta \int F(x, y, dx, dy)$, u. s. w.

Hiernach bedeutet $\int F(x, y, dx, dy) +$ $+ \delta \int F(x, y, dx, dy)$ die dem vom Punkte durchlaufenen Raume δy entsprechende Funktion für den Abscissenwerth $= x$, also jenes $\int F(x, y, dx, dy)$, worin $x = x$, $dx = dx$, $y = y + \delta y$, $dy = d(y + \delta y)$ zu substituiren kommt; also ist $\int F() + \delta \int F() =$ $= \int F(x, y, + \delta y, dx, d(y + \delta y))$, also

$$\begin{aligned}\delta \int F(x, y, dx, dy) &= \int F(x, y + \delta y, dx, d(y + \delta y)) \\ &- \int F(x, y, dx, dy) = \int (F(x, y, \delta y, dx, d(y + \delta y)) \\ &- F(x, y, dx, dy)) = \int \delta F(x, y, dx, dy).\end{aligned}$$

Hätte man die, durch die Veränderlichkeit der Gleichung nach der zweiten Methode, veränderten Werthe von $\int F(x, y, dx, dy)$ statt jener von $F(x, y, dx, dy)$ betrachtet, so hätten sich diese Werthe so ansetzen lassen:
 $\int F(x, y, dx, dy)$, $\int F(\quad) + \delta \int F(\quad)$,
 $\int F(\quad) + \delta \int F(\quad) + \delta \int F(\quad) + \delta \delta \int F(\quad)$,
 u. s. w.

Hiernach bedeutet $\int F(\quad) + \delta \int F(\quad)$ die dem (vom Punkte) durchlaufenen Raume δy entsprechende Funktion für den Abscissenwerth $x + \delta x$, also jenes $\int F(x, y, dx, dy)$, worin $x = x + \delta x$, $y = y + \delta y$, $dx = d(x + \delta x)$, $dy = d(y + \delta y)$ zu substituiren kömmt; also ist $\int F(x, y, dx, dy) + \delta \int F(x, y, dx, dy) = \int F(x + \delta x, y + \delta y, d(x + \delta x), d(y + \delta y))$, also $\delta \int F(x, y, dx, dy) = \int F(x + \delta x, y + \delta y, d(x + \delta x), d(y + \delta y)) - \int F(x, y, dx, dy) = \int (F(x + \delta x, y + \delta y, d(x + \delta x), d(y + \delta y)) - F(x, y, dx, dy)) = \int \delta F(x, y, dx, dy)$.

Wir ersehen hier den wichtigen Lehrsatz $\delta \int F(\quad) = \int \delta F(\quad)$; d. h. die Va-

riation des Integrals eines Differentialausdrucks ist gleich dem Integrale der Variation dieses Differentialausdrucks; jedoch mit der Bemerkung, dass das Zeichen δ auf beiden Seiten der Gleichung *einerlei Variationsmethode* andeuten muss.

Beispiel A. Bei welcher Gleichung zwischen der Abscisse x und der zugehörigen senkrechten Ordinate y , ist die von dem Punkte a nach jenem b (Fig. 5.) gezogene Kurve die kürzeste?

Die Lage der Punkte a, b , ist dadurch bestimmt, dass (bei der angenommenen Abscissenaxe cd , worauf die Abscissen von c aus nach cd positiv gemessen werden) für $x=A$, das $y=\alpha$, für $x=B$ das $y=\beta$ ausfällt. Die Frage heisst also hier soviel, als: Bei welcher Gleichung zwischen x und y unter den besagten Bedingnissen, ist der irgend einem x entsprechende Ausdruck $\int(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$ ein minimum?

Auflösung der Aufgabe nach erster Methode. Wir setzen, es finde dieses statt, bei jener Gleichung zwischen x und y , welcher die Kurve ahb entspricht, so folgt aus Obigem:

$$\frac{\delta f\left((dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta y} = 0,$$

daher $\frac{\int \frac{1}{2}(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}-1} \delta(dx^2+dy^2)}{\delta y} = 0$

oder $\frac{\int (dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}} dy \delta dy}{\delta y} = 0,$ oder

$$\frac{1}{\delta y} \int \frac{dy \delta y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \text{ oder } \frac{dy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \delta y -$$

$$- \int \delta y d\left(\frac{dy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0, \text{ oder } \frac{dy}{ds} -$$

$$- \int \delta y d\left(\frac{dy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0. \quad \text{Hier ist}$$

$\frac{dy}{ds}$ eine Funktion von $x = f(x)$, und

$\frac{\int \delta y d\left(\frac{dy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\delta y}$ eine Funktion von x

und $\delta y = F(x, \delta y)$.

Soll nun aus $f(x) + F(x, \delta y) = 0$ das Inkrementum δy nicht eine Bestimmung erhalten, so muss sowohl $f(x) = 0$ als $F(x, \delta y) = 0$ seyn. Dass aber für δy keine Bestimmung folgen darf, ergibt sich daraus, dass

$\frac{\delta f(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\delta y} = 0$ bleiben muss, bei jeder

denkbaren Veränderlichkeit der Grundgleichung.

Wir haben also $d\left(\frac{dy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0$,

woraus $\frac{dy^2}{dx^2 + dy^2} = D$, also $y = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{(1-D)^{\frac{1}{2}}}x + C$,

worin D und C aus der gegebenen Lage der Punkte a und b leicht zu bestimmen

ist. Die Kurve ist des ersten Grads, d. h. eine gerade Linie, bei welcher der Aus-

druck $f(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ ein max., oder min. ist. Bei weiterer Untersuchung zeigt sich,

dass sie einem minimo entspreche; denn man erhält, wenn man $y = hx + k$, daher

$$dx = \frac{dy}{h} \text{ setzt, für } \frac{\delta \delta (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\delta y^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{h^2} + 1\right) dy^3 \cdot \delta^2 dy + \frac{1}{h^2} dy^2 \cdot (\delta dy)^2}{\delta y^2}$$

einen positiven Werth; denn es kann, da

Variren bloß ein Differenziren durch das

Zeichen δ ist, $dy \cdot \delta dy$ nicht negativ seyn,

so wenig als $z dz$; es ist nemlich $dz = d(+z)$

oder $d(-z)$, je nachdem $z = +$ oder $= -$ ist,

also $z dz = z \cdot d(+z) = z dz$, oder

$= -z \cdot d(-z) = -z \times -dz = z dz$.

Beispiel B. Bei welcher Gleichung zwischen der Abscisse x und der zugehörigen senkrechten Ordinate y , ist der irgend einem Werthe von x entsprechende Flächeninhalt (welcher durch die Abscisse von der Länge x , durch die im Anfangs- und Endpunkte von x gezogene senkrechte Ordinate, und durch das zwischen diesen zwei Ordinaten befindliche Kurvenstück begrenzt ist) ein max., wenn nebstbei besagtes Kurvenstück, für einerlei x , einen beständigen Werth haben soll?

Die zwischen den Koordinaten x und y bestehende Gleichung bei jenen Kurven, welche den Bedingnissen unserer Aufgabe entspricht, ist von der Art, dass der (der Abscisse x entsprechende) Ausdruck $\int y dx$ abnimmt, wenn die Gleichung zwischen x und y nach der ersten oder zweiten Methode) nach einem, übrigens willkührlichen, jedoch solchen Gesetze, um sehr wenig auf entgegengesetzte Art geändert wird, dass durch diese entgegengesetzte Aenderung das Kurvenstück, welches der Abscisse x entspricht, sich nicht ändert. Man mag also alles auf die erste oder auf die zweite Methode beziehen, so lässt sich die eine Ei-

genschaft unserer Kurven durch $\frac{\delta \int y dx}{\delta y} = 0$ ausdrücken. Beziehen wir alles auf die erste Methode, so bleibt das der Abscisse x entsprechende Kurvenstück unverändert, wegen der festgesetzten Variationsmethode, also ist $\delta \int (dx^2 + dy^2) = 0$, wird also alles blos in Bezug auf y und dy varirt, so haben wir die zwei Gleichungen $\delta \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = 0$, und $\frac{\delta \int y dx}{\delta y} = 0$, u. s. w.

Beziehen wir alles auf die zweite Methode, so lässt sich eine solche Variationsmethode gedenken, wodurch das der Abscisse $x \pm \frac{\omega \delta x}{\delta y} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 x}{\delta y^2} \pm \frac{\omega^3}{2 \cdot 5} \frac{\delta^3 x}{\delta y^3} + \dots$ und den vom Punkte durchlaufenen Räumen $+\omega$ und $-\omega$ entsprechende Kurvenstück unverändert bleibt, wodurch also $\delta \int (dx^2 + dy^2) = 0$ ist, welche Gleichung $\delta \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ aber, wegen der Allgemeinheit der hier festgesetzten Variationsmethode, auch jene Variationsmethode mit in sich begreift, wodurch das der Abscisse $\dot{x}$ entsprechende Kurvenstück unverändert bleibt, indem erwähnte allge-

meine Variationsmethode auch jene mit einschliesst, wornach x sich nicht ändert, also

das dem $x + \frac{\omega \delta x}{dy} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\delta^2 x}{dy^2} + \dots$ entsprechende unveränderliche Kurvenstück

jenes ist, das dem Werthe x entspricht. Wird also alles in Bezug auf y, dy, x, dx ,

varirt, so haben wir die zwei Gleichungen

$$\delta f(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = 0, \text{ und } \frac{\delta f y dx}{\delta y} = 0, \text{ u. s. w.}$$

Auflösung der Aufgabe nach der zweiten Methode. Es ergibt sich aus $\delta f(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = 0$

folgendes: $\int \frac{dx d\delta x + dy d\delta y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$, oder

$$\frac{dx d\delta x + dy d\delta y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \text{ also } d\delta x = - \frac{dy \cdot d\delta y}{dx};$$

ferner folgt aus $\frac{\delta f y dx}{\delta y} = 0$ folgendes:

$$\frac{f(y d\delta x + dx \delta y)}{\delta y} = 0; \text{ wird hierin } d\delta x =$$

$-\frac{dy \cdot d\delta y}{dx}$ substituirt, so erhält man

$$\int \frac{\left(-\frac{y dy d\delta y}{dx} + dx \delta y \right)}{\delta y} = 0; \text{ hieraus}$$

$$\frac{f dx \delta y + f \delta y \cdot d \left(\frac{y dy}{dx} \right) - \frac{y dy}{dx} \delta y}{\delta y} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{f \left(dx \delta y + \delta y d \left(\frac{y dy}{dx} \right) \right)}{\delta y} - \frac{y dy}{dx} = 0, \text{ wor-}$$

aus folgt $\frac{y dy}{dx} = 0$ und

$$\frac{f \left(dx \delta y + \delta y d \left(\frac{y dy}{dx} \right) \right)}{\delta y} = 0, \text{ da für } \delta y$$

keine Bestimmung folgen darf, welche letztere Gleichung gibt $dx \delta y + \delta y d \left(\frac{y dy}{dx} \right) = 0$, also

auch $dx + d \left(\frac{y dy}{dx} \right) = 0$, woraus folgt

$dx = d \left(\frac{y dy}{dx} \right)$, also $x = -\frac{y dy}{dx} + C$, und

hieraus: $y^2 + x^2 = G \cdot x + H$. Also ist die gesuchte Kurve ein Kreis.

Die Auflösungsmethode dieser Aufgabe bietet uns die Gelegenheit dar, folgende interessante Bemerkung zu machen: Wenn die Gleichung zwischen x und y gegeben ist, also $\int F(x, y, dx, dy)$ durch $f(y)$ ausge-

drückt werden kann, so folgt aus $\frac{df(y)}{dy} = 0$,

oder aus $\frac{dF(x, y, dx, dy)}{dy} = 0$, allemal nur

die Bestimmung jener Werthe von y , wodurch dieser Gleichung Genüge geleistet

wird, denn $\frac{df(y)}{dy}$ ist allemal so viel als

$\frac{f'(y) dy}{dy} = 0$. Ist hingegen die Gleichung

zwischen x und y noch unbestimmt, so kann

der Gleichung $\frac{\delta F(x, y, dx, dy)}{\delta y} = 0$ auf

zweierlei Art Genüge geleistet werden, und

zwar: 1. dadurch, dass man y durch x

dergestalt ausdrückt, d. h. dass man zwischen

x und y eine solche Gleichung annimmt,

dass man hierdurch (werde die Gleichung

zwischen x und y , daher auch der

Ausdruck $F(x, y, dx, dy)$, nach welchem immer

einem Gesetze verändert) allemal erhält

$\frac{\delta F(x, y, dx, dy)}{\delta y} = 0$; 2. dadurch, dass

man bei einer angenommenen Gleichung

zwischen x und y diese Gleichung nach

einem solchen Gesetze ändert, dass durch

dieses Gesetz die Veränderung entsteht:

$$\frac{\delta f(x, y, dx, dy)}{\delta y} = 0.$$

Wir wollen diese Betrachtung auf den Ausdruck $\int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ anwenden, wobei wir allemal in Bezug auf x, y, dx, dy , variiren.

Drücken wir hier die Gleichung zwischen x und y auf eine unbestimmte Art dadurch aus, dass wir $y = \psi(x)$ setzen, so haben wir $dy = \psi'(x) dx$; es geschieht demnach der Gleichung $\frac{\delta f(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\delta y} = 0$, oder

jener $d\delta y = -\frac{d\delta x}{\psi'(x)}$ Genüge, wenn man die

Gleichung der Kurven nach einem solchen Gesetze ändert, dass $d\delta y = \frac{d\delta x}{\psi'(x)}$ werde, d. h., dass

wenn man $\delta x = \varphi(x)$ also $d\delta x = \varphi'(x) dx$ setzt, dass man $d\delta y = -\frac{\varphi'(x) dx}{\psi'(x)}$, oder

$\delta y = -\frac{\int \varphi'(x) dx}{\psi'(x)}$ setzt. Es geschieht aber

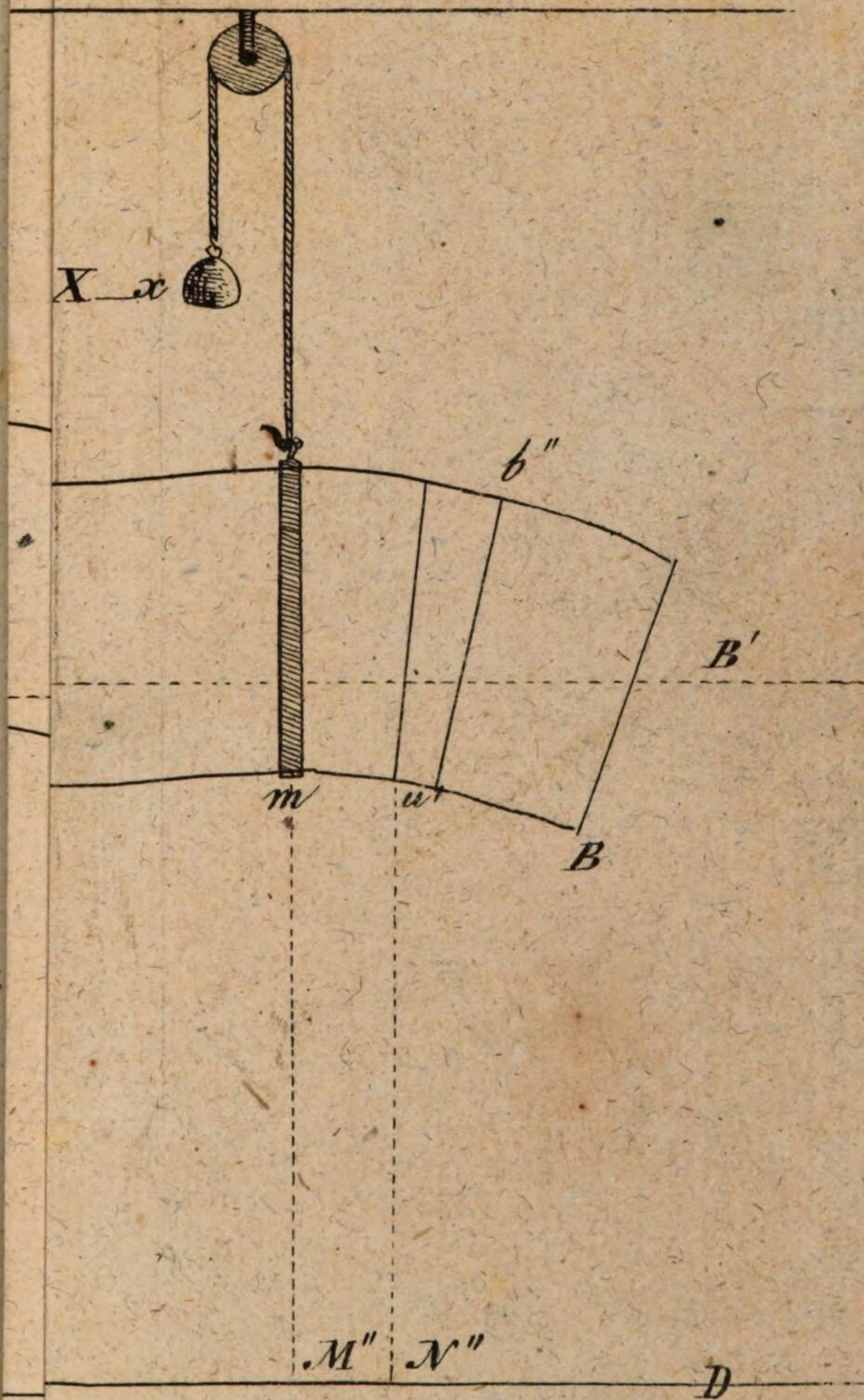
auch der Gleichung $\frac{\delta f(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\delta y} = 0$, ein

Genüge, wenn zwischen x und y eine solche Gleichung angenommen wird, dass hie-

durch $\frac{\delta f(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\delta y} = 0$ wird, man mag die Gleichung zwischen x und y , also den Ausdruck $f(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ nach y immer einem Gesetze ändern. Die hiezu erforderliche Gleichung zwischen x und y ist, wie im Beispiele A gezeigt wurde, die gerade Linie.

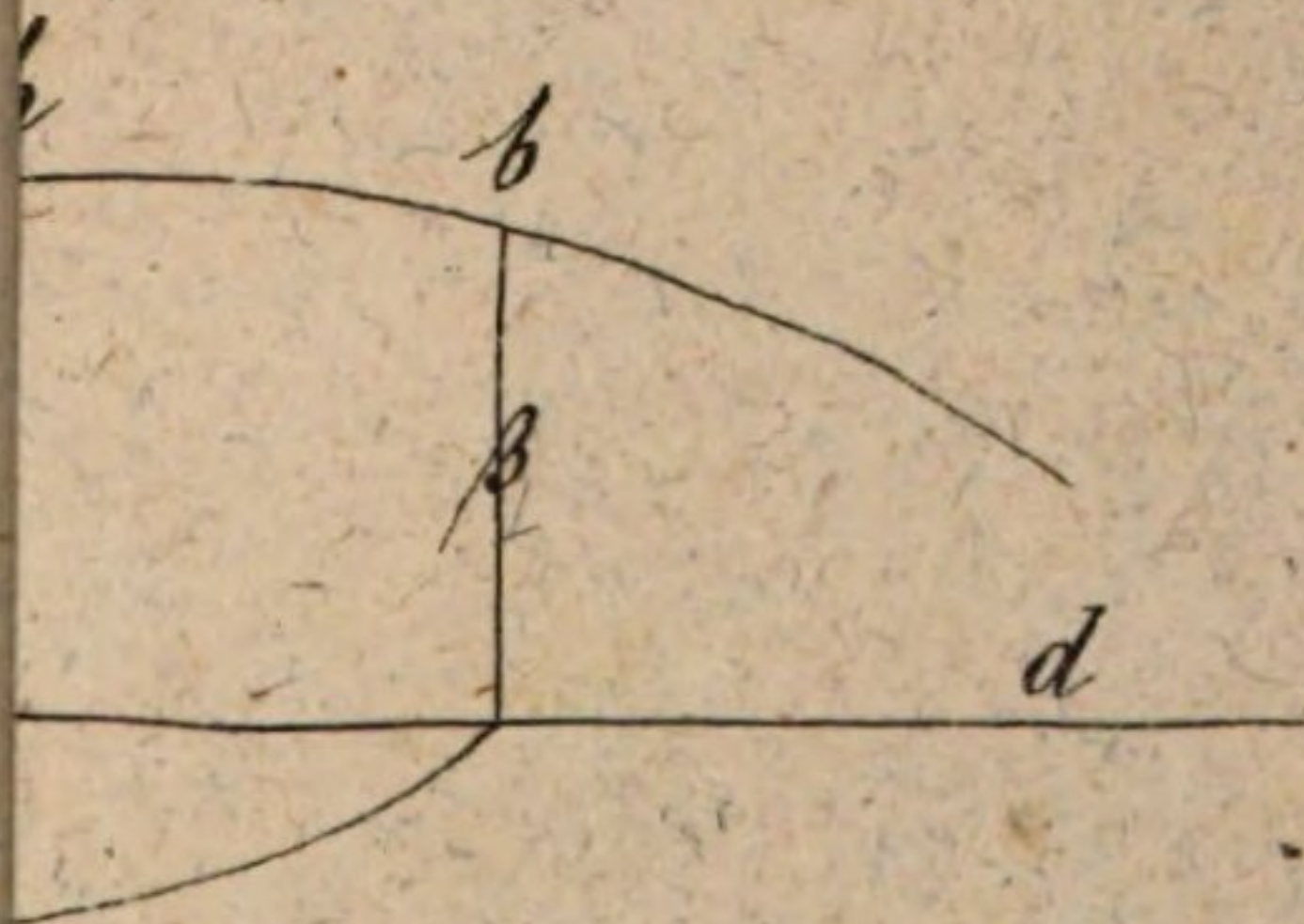
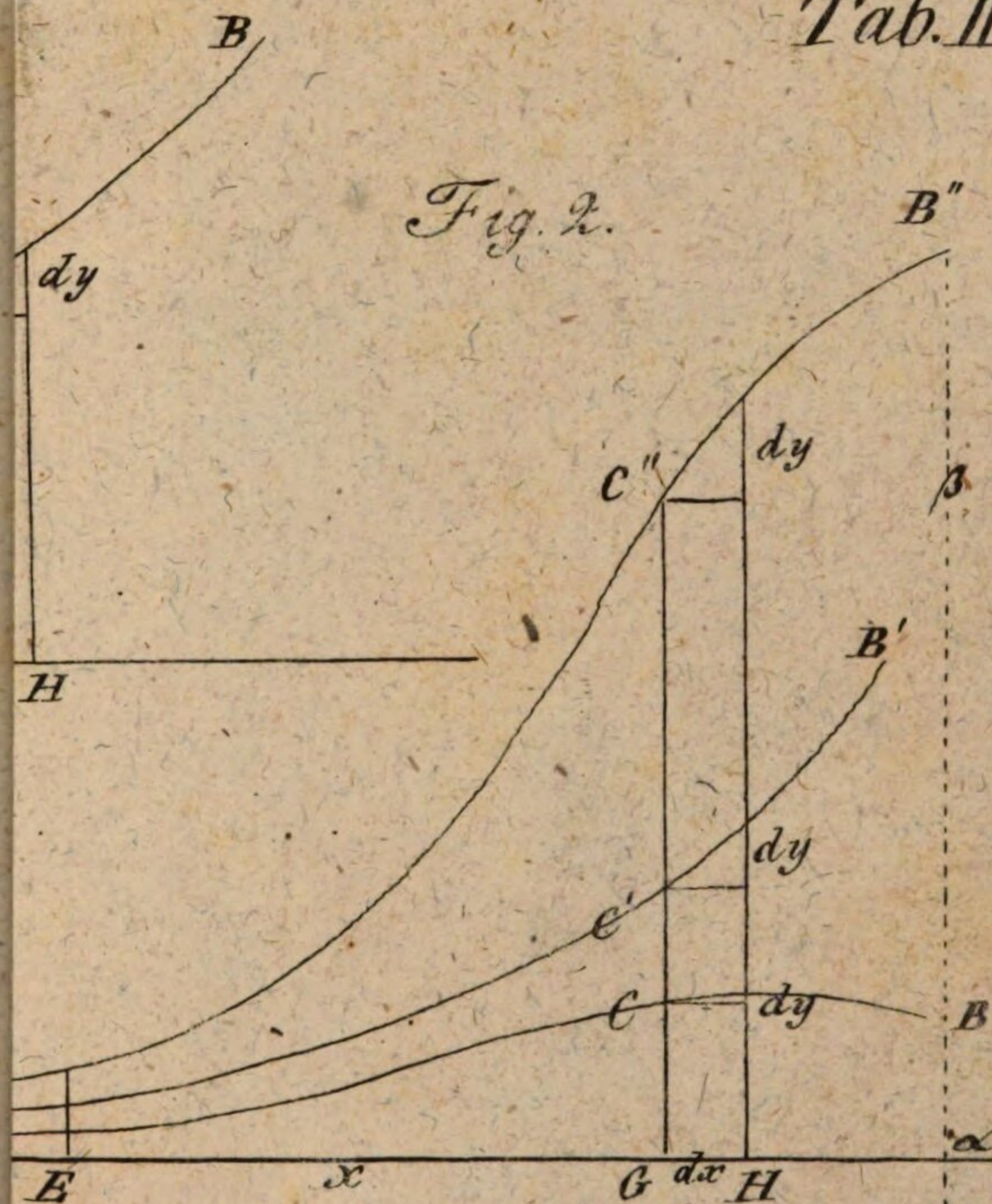
Verbesserung:

S. 5. 6. 7. S. 14. Z. 2. v. u. und S. 15. Z. 2. v. o. lese man überall η statt X .



zu Gf. v. Buquoy 2 mathem. Aufs.

Fig. 2.



Buquoy, Georg <<von>>,

Zwei Aufsätze mathematischen Inhalts, nemlich: 1) Versuch einer Theorie über die Vertheilung des Druckes bei einem horizontal auf drei Unterlagen ruhenden Balken. 2) Eine eigne Darstellung der Grundlehren der Variationsrechnung

Leipzig 1812

Math.a. 53 m#Beibd.2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080608-2